



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
9 класс



Решения

1. В школе учатся 533 ученика. Каждый из мальчиков посчитал величину: количество мальчиков, с которыми он дружит, минус количество девочек, с которыми он дружит. Каждая девочка посчитала величину: количество мальчиков, с которыми она не дружит, минус количество девочек, с которыми она не дружит. Могла ли сумма всех полученных результатов равняться 999?

(С. А. Лучинин)

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что каждая дружба между двумя мальчиками прибавляет к каждому из их результатов 1; каждая «не дружба» между двумя девочками вычитает из их результатов по 1; а каждая пара (мальчик, девочка) или прибавляет к результату девочки 1, или вычитает из результата мальчика 1. Но таких пар (мальчик, девочка) — чётно, так как их $x(533 - x)$, где x это количество мальчиков. Следовательно, сумма всех полученных результатов должна получиться чётной.

Критерии. Ключевой математический факт: общая сумма результатов всегда чётна, поэтому равенство 999 невозможно. Полными считаются любые корректные доказательства этого факта, в частности:

- подсчёт вкладов пар учеников разных типов;
 - алгебраический подсчёт через числа дружеских пар;
 - инвариантное рассуждение: изменение статуса одной дружбы меняет общую сумму на чётное число, а выбранная базовая конфигурация имеет чётную сумму;
 - корректное графовое/паритетное доказательство через суммы степеней или эквивалентные величины.
- [7 баллов.] Верное решение.

- [3 балла.] Задача сведена к доказательству того, что пар «мальчик-девочка» чётно.
- [2 балла.] Замечено, что пар «мальчик-девочка» чётно.
- [2 балла.] Замечено, что вклад пар «мальчик-мальчик» и «девочка-девочка» 0, 2 или -2.
- [1 балл.] Сформулировано верное утверждение “сумма должна быть чётной”, но без существенных продвижений.
- [0 баллов.] Нет содержательного продвижения по задаче.

2. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расположить на доске 100×100 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного коня по непобитым ладьями клеткам? (Ладья бьёт клетку, на которой она стоит; стартовая и конечная угловые клетки пути коня также не должны быть побиты ладьями.)

(С. А. Лучинин)

Ответ: 49.

Решение. Пронумеруем числами от 1 до 100 строчки снизу вверх и столбцы слева направо. Тогда клетка с координатами (a, b) находится в a -ом столбце и b -ой строке. В качестве примера поставим ладей в клетки $(2, 3), (4, 5), (6, 7), \dots, (98, 99)$. Тогда существует путь коня по непобитым клеткам: $(1, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (5, 1) \rightarrow (7, 2) \rightarrow (9, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (99, 2) \rightarrow (100, 4) \rightarrow (99, 6) \rightarrow \dots \rightarrow (100, 100)$.

Докажем, 50 ладей не получится поставить. Предположим, что первый ход коня идёт в клетку $(2, 3)$ (с клеткой $(3, 2)$ аналогично). Тогда мы не можем поставить ладей в 1-ый и 2-ой столбцы. Разобьём остальные столбцы на пары: $3 - 4, 5 - 6, \dots, 99 - 100$. В каждой паре столбцов стоит не более одной ладьи, так как иначе конь не сможет «перепрыгнуть» эти два столбца и оказаться в 100-ом столбце. Следовательно, ладей не более 49.

Критерии.

- [7 баллов.] Верное решение.
- [3 балла.] Доказано, что ладей не более 49.
- [2 балла.] Приведён пример правильной расстановки 49 ладей.
- [0 баллов.] Нет содержательного продвижения по задаче.

3. Найдите все такие тройки вещественных чисел (a, b, c) , что для любого вещественного числа $t \neq -a$ квадратный трёхчлен $(a+t)x^2 + (b+t)x + (c+t)$

не имеет корней.

(С. А. Лучинин)

Ответ: Все тройки $a = b = c$.

Решение. Если $a \neq c$, то мы можем подобрать такое t , чтобы числа $a + t$ и $c + t$ были разных знаков. Тогда дискриминант квадратного трёхчлена $(a + t)x^2 + (b + t)x + (c + t)$ будет больше 0, и, следовательно, будет иметь корень. Далее считаем, что $a = c$.

Если $b \neq a$, то пусть $b = a + s$. Возьмём $t = -a + \varepsilon$. Тогда дискриминант квадратного трёхчлена $(a + t)x^2 + (b + t)x + (c + t) = \varepsilon x^2 + (s + \varepsilon)x + \varepsilon$ равен $f(\varepsilon) = (s + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon^2 = s^2 + 2s\varepsilon - 3\varepsilon^2$. График f это парабола ветвями вниз, причём $f(0) = s^2 > 0$. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такой, что $f(\varepsilon) > 0$. Тогда при таком ε дискриминант будет трёхчлена $(a + t)x^2 + (b + t)x + (c + t)$ будет положительным, что приводит к противоречию. Значит, $b = a$.

Осталось убедиться, что при $a = b = c$ квадратный трёхчлен $(a + t)x^2 + (a + t)x + (a + t)$ не имеет корней. Это следует из того, что квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ не имеет корней.

Критерии.

- [7 баллов.] Верное решение.
- [6 баллов.] Доказано, что $a = b = c$, но нет проверки, что $a = b = c$ подходит.
- [1 балл.] только правильный ответ $a = b = c$ без доказательства;
- [1 балл.] доказано одно из необходимых равенств, например $a = c$;
- [1 балл.] проверено, что $a = b = c$ подходит; (Этот критерий суммируется с предыдущим).
- [0 баллов.] Нет содержательного продвижения по задаче.

4. Андрей выписал на доску несколько (не менее трёх) последовательных натуральных чисел. Некоторые числа он написал красным маркером, а остальные — синим. Оказалось, что НОК красных чисел в 70 раз больше НОК синих чисел. Докажите, что разность каких-то двух разноцветных чисел является натуральной степенью тройки.

(А. А. Солюмин)

Решение.

Рассмотрим все выписанные Андреем числа с максимальным вхождением тройки. Их не менее двух (одно красное, другое синее, потому что 70 не делится на 3). И не более двух, потому что среди любых трёх

подряд идущих чисел, кратных 3^k , найдётся число, кратное 3^{k+1} . Значит, это должны быть числа $x \cdot 3^k$ и $(x+1) \cdot 3^k$. Они-то и отличаются на 3^k .

Замечание. Такой набор чисел существует — числа от 3 до 8. Красные числа — 3, 5, 7, 8, синие — 4 и 6.

Критерии.

- [7 баллов.] Верное решение.
- [1 балла.] Замечено, что есть числа обоих цветов, содержащую максимальную степень 3.
- [0 баллов.] Нет содержательного продвижения по задаче.

5. Дан остроугольный треугольник ABC ($AB < BC$) с описанной окружностью Ω . Точка M — середина стороны AC . Прямая BM вторично пересекает Ω в точке P . Касательная к Ω в точке P пересекает прямую AC в точке Q . Окружность ω , описанная около треугольника PQM , вторично пересекает Ω в точке K . Оказалось, что $BC = PQ$. Докажите, что $KB = KC$.
(Д. Р. Немзоров, С.А.Лучинин)

Решение. Заметим, что точка O — центр окружности Ω , лежит на ω , так как $\angle OMQ = \angle OPQ = 90^\circ$. Следовательно, $\angle OKQ = 90^\circ$, то есть QK — это касательная к Ω . Так как $QK = QP$, то $\angle KMQ = \angle PMQ = \angle AMB$. Мы получили, что из середины хорды AC под равными углами выпущены лучи MB и MK до пересечения с Ω . Следовательно, $ABKC$ это равнобедренная трапеция.

Мы получили, что $QK = QP = BC$ и $BK \parallel CQ$, откуда следует, что $CBKQ$ это или параллелограмм, или равнобедренная трапеция. Треугольник ABC остроугольный, поэтому $\angle BCQ = 180^\circ - \angle ACB > 90^\circ$ и $\angle BKQ > \angle OKQ = 90^\circ$. То есть, $CBKQ$ это параллелограмм. Значит, $\angle KBC = \angle KQM = \angle KPB$. То есть дуги, а значит и хорды, BK и KC равны.

Критерии.

- [7 баллов.] Верное решение.
- [3 балла.] доказано, что $BK \parallel CQ$ (этот критерий не суммируется с двумя следующими).
- [1 балл.] доказано, что O лежит на ω .
- [1 балл.] доказано, что $QK = QP$.
- [0 баллов.] Нет содержательного продвижения по задаче.