



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур

13 сентября 2026 года

8 класс



Решения

1. Вася задумал различные натуральные числа a, b, c , большие 1 и такие, что среди чисел $a-1, b-1, c-1, a^2, b^2, c^2$ менее пяти различных, а число $8a-5b-3c$ положительно. Докажите, что оно составное.

(Фольклор в обработке М. А. Антипова)

Решение. Числа $a-1, b-1, c-1$ попарно различны, как и числа a^2, b^2, c^2 . Так как среди всех шести чисел имеется менее пяти различных, то между этими двумя тройками есть по крайней мере два совпадения.

Каждое такое совпадение имеет вид $u-1 = v^2$, где $u, v \in \{a, b, c\}$, то есть $u = v^2 + 1$. При этом $u > v$. Поэтому два совпадения обязаны образовывать цепочку из трёх чисел:

$$y = x^2 + 1, \quad z = y^2 + 1,$$

где

$$\{a, b, c\} = \{x, y, z\}, \quad x \geq 2.$$

Положим $d = x^2 - x + 1$. Тогда $y - x = x^2 + 1 - x = d$, а $z - x = (x^2 + 1)^2 + 1 - x = x^4 + 2x^2 + 2 - x = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 2)$.

Следовательно, $\{a, b, c\} = \{x, x + d, x + (x^2 + x + 2)d\}$.

Так как $8 - 5 - 3 = 0$, при любом порядке чисел a, b, c величина $8a - 5b - 3c$ делится на d . Действительно, если

$$a = x + r_a d, \quad b = x + r_b d, \quad c = x + r_c d,$$

где

$$\{r_a, r_b, r_c\} = \{0, 1, x^2 + x + 2\},$$

то

$$8a - 5b - 3c = d(8r_a - 5r_b - 3r_c).$$

При $x \geq 2$ имеем $d = x^2 - x + 1 \geq 3$. Осталось заметить, что второй множитель не может равняться ± 1 . Действительно, один из r_a, r_b, r_c равен

$$M = x^2 + x + 2 \geq 8,$$

поэтому

$$|8r_a - 5r_b - 3r_c| \geq 3M - 8 \geq 16.$$

По условию, число $8a - 5b - 3c$ не равно нулю, значит оно имеет нетривиальный делитель d и потому составное.

Критерии.

• 7 баллов — полное корректное доказательство. В типичном решении необходимо:

- доказать наличие двух перекрёстных совпадений между тройками $a - 1, b - 1, c - 1$ и a^2, b^2, c^2 ;
- вывести, что числа a, b, c образуют цепочку

$$x, \quad x^2 + 1, \quad (x^2 + 1)^2 + 1;$$

- корректно использовать условие $8a - 5b - 3c > 0$;
- разобрать оба возможных порядка двух меньших чисел либо дать способ, одновременно покрывающий оба порядка;
- доказать нетривиальную делимость/факторизацию.

Любое иное полное корректное решение оценивается так же.

- 6 баллов — решение по существу полное, но содержит локальный дефект, не разрушающий метод: безвредную арифметическую опisku, небольшой недоказанный переход при исключении порядка, либо ложный промежуточный тезис, который дальше фактически исправлен и не используется в финальном доказательстве.
- 5 баллов — правильно получена цепочка и корректно доказана составность для одного из двух допустимых порядков двух меньших чисел, но второй порядок не рассмотрен.
- 4 балла — цепочка (или эквивалентная структурная классификация) получена, но заключительное доказательство составности существенно не завершено либо заменено неверным модульным, паритетным или численным аргументом.
- 3 балла — существенная структурная часть: корректно установлена необходимость перекрёстных совпадений и сделано заметное продвижение к цепочке, но до полной структуры или заключительной делимости остаётся существенный пробел.

• 1 балл — отдельное верное наблюдение, частный пример, паритетная идея или фрагмент разбора, не дающий существенной части общего доказательства.

• 0 баллов — содержательного продвижения нет; приведён ложный контрпример; решается другая задача; либо рассуждение основано на нарушении явного условия, например на равенстве двух из попарно различных чисел a, b, c .

2. В каждой клетке доски 8×8 провели диагональ. Распутье — это общая вершина четырёх клеток, из которой выходит ровно три диагонали. Какое наибольшее число распутий могло образоваться?

(М. А. Антипов)

Ответ: 33.

Решение. Обозначим два направления диагоналей через $/$ и $\backslash$.

Рассмотрим одну горизонтальную линию, проходящую через семь внутренних вершин доски. Для каждого из восьми столбцов рассмотрим две клетки, прилегающие к этой линии: верхнюю и нижнюю. Положим

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если в верхней клетке проведена диагональ } /, \\ 0, & \text{если в ней проведена диагональ } \backslash, \end{cases}$$

и аналогично

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если в нижней клетке проведена диагональ } /, \\ 0, & \text{если в ней проведена диагональ } \backslash. \end{cases}$$

Пусть $z_j = x_j - y_j$. Тогда $z_j \in \{-1, 0, 1\}$.

Во внутренней вершине между j -м и $(j+1)$ -м столбцами сходятся

$$(1 - x_j) + x_{j+1} + y_j + (1 - y_{j+1}) = 2 + z_{j+1} - z_j$$

диагоналей. Значит, эта вершина является распутьем тогда и только тогда, когда

$$z_{j+1} - z_j = 1.$$

Следовательно, три последовательные вершины одной горизонтали не могут все быть распутьями: иначе для некоторых j имели бы

$$z_{j+3} = z_j + 3,$$

что невозможно, поскольку все z_j лежат между -1 и 1 . По симметрии то же верно и для трёх последовательных вершин одной вертикали.

Теперь разобьём 48 из 49 внутренних вершин доски на 16 троек последовательных вершин. Например, в первых шести строках разобьём вершины на 14 вертикальных троек, а в последней строке первые шесть вершин — на две горизонтальные тройки. Одна вершина останется отдельно.

В каждой тройке находится не более двух распутий, поэтому всего распутий не более

$$16 \cdot 2 + 1 = 33.$$

Покажем, что 33 распутия действительно можно получить. Нумеруем строки и столбцы клеток числами $1, \dots, 8$. Проведём диагональ $\backslash$ в клетке (i, j) тогда и только тогда, когда

$$i + j \equiv 2 \pmod{3},$$

а во всех остальных клетках проведём диагональ $/$.

При такой расстановке внутренняя вершина (r, c) не является распутием ровно тогда, когда

$$r + c \equiv 1 \pmod{3}.$$

Среди 49 внутренних вершин таких вершин ровно 16, поэтому распутий

$$49 - 16 = 33.$$

Критерии.

- 7 баллов — полностью доказано, что распутий не более 33, и предъявлена корректная конструкция с 33 распутиями.
- 6 баллов — по существу полное решение с локальным устранимым пропуском, не затрагивающим обе основные части решения. В проверенном массиве этот уровень не понадобился.
- 5 баллов — правильный ответ и корректная конструкция на 33; имеется содержательная правильная идея верхней оценки, но в доказательстве максимальности остаётся существенный пробел.
- 4 балла — корректно доказана верхняя оценка $R \leq 33$, но достижимость 33 не доказана или предложенный пример нельзя надёжно проверить.
- 3 балла — предъявлена проверяемая конструкция с 33 распутиями, но доказательство максимальности отсутствует или по существу неверно.
- 2 балла — содержательное продвижение: существенная верная идея к верхней оценке или конструкции, однако из-за серьёзного пробела или ошибки решение не достигает уровней выше.

- 1 балл — записан верный ответ 33 без содержательного доказательства либо имеется лишь небольшой верный фрагмент.
- 0 баллов — содержательного корректного продвижения нет; основной результат неверен, решение отсутствует или относится к другой задаче.

3. Положительное число x таково, что $\{x^2 + x\} = \frac{1}{36}$. Может ли x быть рациональным?

(Фольклор в обработке М. А. Антипова)

Ответ: Да.

Решение. Будем искать решение в виде $x = \frac{a}{33}$. Тогда $x^2 + x = \frac{a^6 + 3^3 a}{3^6}$, и нам требуется, чтобы числитель был сравним с 1 по модулю 3^6 . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a^2 + 3^3 a &\equiv 1 \pmod{3^6}, \\ a^2 - (3^6 - 3^3) a &\equiv 1 \pmod{3^6}, \\ a^2 - 2 \cdot \frac{3^6 - 3^3}{2} a + \left(\frac{3^6 - 3^3}{2}\right)^2 &\equiv 1 \pmod{3^6}, \\ \left(a - \frac{3^6 - 3^3}{2}\right)^2 &\equiv 1 \pmod{3^6}. \end{aligned}$$

Это достигается, например, при $a = \frac{3^6 - 3^3}{2} = 352$.

Критерии.

- 7 баллов — дан корректный рациональный пример (например, $x = 350/27$ или $x = 352/27$). Явного правильного примера достаточно: требуемая проверка состоит в непосредственной подстановке. Неряшливая арифметическая проверка не снижает балл, если сам пример записан однозначно и верен.
- 5 баллов — по существу найден правильный пример, но в его записи/выводе есть заметный локальный дефект, из-за которого предъявленное значение формально записано неверно, либо правильный пример получен из некорректного промежуточного равенства и сам не проверен.
- 3 балла — получено существенное правильное сведение, например $q = 27$ вместе с условием $p^2 + 27p \equiv 1 \pmod{729}$ (или эквивалентным условием на дискриминант), но подходящий числитель не найден либо далее сделан ошибочный вывод.
- 2 балла — есть содержательный правильный фрагмент анализа знаменателя, делимости или дискриминанта, но до ключевого сравнения/конструкции работа не доведена.

- 1 балл — есть лишь слабое содержательное продвижение; либо дан правильный ответ “да” без конкретного примера; либо правильный ответ сопровождается неверным обоснованием, не дающим конструкции.
- 0 баллов — неверный ответ без содержательного продвижения; неверный пример; решение другой задачи; либо пустая работа.

4. Дана трапеция $ABCD$ (AD и BC параллельны). Точки P, Q на отрезке AD таковы, что $AQ - QD = DP - PA = BC$. Докажите, что если $PB = PD$, то $CQ = AQ$.

(Фольклор в обработке М. А. Антипова)

Решение. Пусть $AD = a$, $BC = b$. Так как P, Q лежат на AD , из $AQ - QD = b$, $AQ + QD = a$ получаем $AQ = \frac{a+b}{2}$, $QD = \frac{a-b}{2}$. Аналогично из $DP - PA = b$ следует $DP = \frac{a+b}{2}$, $PA = \frac{a-b}{2}$. Значит, $PQ = AD - PA - QD = b = BC$. При этом $PQ \parallel BC$, поэтому $PBCQ$ — параллелограмм. Следовательно, $CQ = PB = PD = AQ$, что и требовалось доказать.

Критерии.

- 7 баллов — полное корректное доказательство. Локальные опiski в обозначениях, не влияющие на логику решения, не штрафуются.
- 6 баллов — решение по существу полное: правильная основная схема доведена почти до конца, но имеется один локальный пропуск в обосновании или не записан один непосредственный завершающий переход. Пропуск не должен содержать новой существенной идеи.
- 4 балла — получена существенная часть решения: например, доказаны основные метрические равенства на основании ($AP = QD$, $AQ = PD$) и/или $PQ = BC$, однако ключевой переход к $CQ = PB$ либо финальное завершение отсутствует, либо заменено неверным геометрическим утверждением.
- 2 балла — Имеется отдельный правильный фрагмент, заметно связанный с задачей (например, одно из ключевых метрических равенств или верная финальная цепочка при отсутствии доказательства её нетривиальных звеньев), но основной механизм решения не установлен.
- 1 балл — есть слабое содержательное наблюдение или начало вычислений, не дающее существенной части доказательства.
- 0 баллов — содержательного правильного продвижения нет; решение отсутствует или основано на существенных неверных утверждениях без полезной части.

5. В клубе 100 джентльменов. Распад клуба происходит следующим образом: часть джентльменов покидает клуб и основывает новый в другом месте. Затем то же происходит с одним из двух получившихся клубов и так далее, пока каждый джентльмен не окажется предоставлен самому себе. Сколькими способами может произойти распад клуба?

(Фольклор в обработке М. А. Антипова)

Ответ: $100! \cdot 99!$

Решение. Будем смотреть обратный процесс — из 100 клубов по одному джентльмену собирать один клуб. Пусть у нас осталось k клубов, и пусть два каких-то клуба соединились. Сделать это можно $k(k-1)$ способом — k способами можно выбрать клуб, который после объединения сохранит своё название, и $k-1$ способом — тот, который исчезнет при объединении (т.е. который должен появиться при распаде).

Критерии.

- 7 баллов — полное корректное решение любой из двух естественных трактовок с явным указанием используемой модели. В авторской трактовке, в частности, достаточно корректно получить $k(k-1)$ на каждом обратном шаге и перемножить эти множители.
- 5 баллов — главная комбинаторная структура и правильный локальный множитель $k(k-1)$ получены, но допущена локальная арифметическая/алгебраическая ошибка при окончательном перемножении, не затрагивающая метод.
- 4 балла — правильно введён обратный процесс, но два объединяемых клуба ошибочно считаются неупорядоченной парой. Типичный результат:

$$\prod_{k=2}^{100} \binom{k}{2} = \frac{100! \cdot 99!}{2^{99}}.$$

- 3 балла — существенная часть структуры подсчитана, но потерян один большой комбинаторный параметр. Типичные случаи: получено $99!$ из последовательности размеров разделяемых/отделяемых частей без учёта конкретного состава клубов; правильный ответ угадан по малым случаям или получен с существенным пробелом в доказательстве.
- 2 балла — есть содержательная, но заметно более слабая модель задачи: учтены только цепочечные распады (обычно получается $100!$), либо распознана бинарная древовидная структура, но посчитана другая структура (например, $197!!$ или число Каталана), либо правильный ответ просто записан без доказательства.

- 1 балл — отдельное верное наблюдение без достаточного продвижения к подсчёту, например установлено только, что происходит 99 распадов.
- 0 баллов — нет содержательного корректного продвижения, либо приведён только неверный ответ/несвязанный подсчёт.