



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
7 класс



Решения

1. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоят ладьи. Будем считать пару ладей правильной, если одна из них стоит строго выше и правее другой. В какой таблице правильных пар ладей больше – 2025×2026 или 2024×2027 ?

(Д. М. Шубинский, С. Е. Розова)

Ответ: В первой.

Решение. Рассмотрим две произвольные строки и два произвольных столбца. В их пересечении находятся 4 клетки. Пусть номера строк x_1, x_2 ($x_1 > x_2$), а номера столбцов y_1, y_2 ($y_1 > y_2$). Заметим, что условие задачи говорит, что для правильной пары ладей номер строки одной больше, чем номер другой, и номер столбца одной ладьи больше, чем номер столбца другой. Но для любых пар строк и столбцов, существует ровно одна из четырёх комбинаций координат ладей которая будет образовывать правильную пару (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Посчитаем количество способов выбрать две строки и два столбца для первой таблицы. Выбрать две строки можно $C_{2025}^2 = \frac{2025 \cdot 2024}{2}$ способами и два столбца $C_{2026}^2 = \frac{2026 \cdot 2025}{2}$ способами. Поскольку варианты выбора строк и столбцов независимы, то в итоге получаем ответ: $C_{2025}^2 \cdot C_{2026}^2 = \frac{2025 \cdot 2024 \cdot 2026 \cdot 2025}{4}$. Для второй таблицы аналогично получаем $C_{2027}^2 \cdot C_{2024}^2 = \frac{2027 \cdot 2026 \cdot 2024 \cdot 2023}{4}$. Так как $2025 \cdot 2025$ больше $2023 \cdot 2027$ получаем, что в первой таблице правильных пар ладей больше.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 6 баллов — полное решение с небольшой логической или арифметической ошибкой
- 4 балла — правильная идея с явными продвижениями
- 2 балла — есть продвижение по решению + ответ
- 1 балл — правильный ответ
- 0 баллов — неправильный ответ

2. В вершинах пятиугольника расставлены натуральные числа. На каждом ребре этого пятиугольника написано число, равное $a + b + \text{НОК}(a, b)$, где a и b — числа в вершинах, которые соединяет это ребро. Оказалось, что все числа, написанные на рёбрах, равны. Могут ли все числа в вершинах быть различными?

(С. Е. Розова, Д. М. Шубинский)

Ответ: Нет, не могут.

Решение. Пойдём от противного. Допустим, что все числа различные. Рассмотрим наибольшее из них a и выходящие из него ребра, которые соединяют a с числами b и c . Так как числа, написанные на рёбрах, равны: $a + b + \text{НОК}(a, b) = a + c + \text{НОК}(a, c)$, то есть $b - c = \text{НОК}(a, c) - \text{НОК}(a, b)$, правая часть делится на a , значит и левая часть должна делиться. Но b и c меньше, чем a , значит необходимо $c = b$, что противоречит тому, что все числа в вершинах различны.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 6 баллов — полное решение с незначительной опiskой, не влияющей на смысл
- 3-5 баллов — в решении не доказаны некоторые существенные утверждения, при этом общая структура решения верна
- 0 баллов — отсутствие решения. Само по себе упоминание максимального числа продвижением в решении не является. За ответ баллы не начисляются.

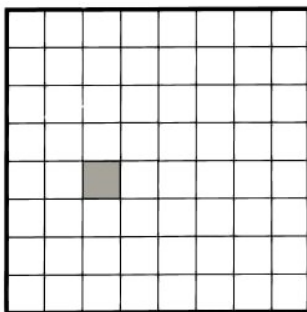
3. Есть 30 одинаковых на вид монет трёх весов, ровно по 10 каждого веса. Весы позволяют сравнивать только одну монету с одной. Как за 30 взвешиваний найти хотя бы одну монету каждого веса?

(К. А. Кноп)

Решение. Первый этап: возьмем произвольную монету X и будем взвешивать её последовательно с 20 другими монетами. На это потратим 20 взвешиваний. При этом из 20 монет точно найдутся минимум 11, не равных X по весу. Второй этап: возьмем эти 11 монет. За оставшиеся 10 взвешиваний взвесим сначала 1ю с 2й, потом 2ю с 3й, и так далее, 10ю с 11й. Среди этих 11 монет точно есть монеты обоих оставшихся весов. Значит, какое-то из этих 10 взвешиваний даст нам неравенство, что будет означать, что монеты оставшихся двух весов найдены.

Критерии.

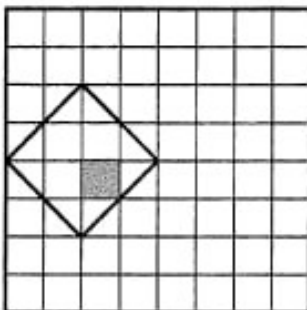
- 7 баллов — полный гарантированный алгоритм, использующий не более 30 сравнений, с корректным обоснованием. Способ решения не обязан совпадать с авторским.
 - 5 баллов — почти полная правильная стратегия, но один существенный случай или часть оценки не доказаны; для завершения требуется заметное, но локальное дополнение.
 - 3 балла — содержательное продвижение: строится алгоритм поиска, но доказательство, что 30 ходов хватит, почти полностью отсутствует, или способ гарантированно получить третий вес за оставшиеся сравнения не описан. Типичный пример: после нахождения двух весов новая монета сравнивается только со вторым эталоном, хотя отличающаяся от него монета может иметь вес первого эталона.
 - 0 баллов — неверное решение без содержательного продвижения или решение другой задачи.
4. Из квадрата 8 на 8 вырезана клетка. Покажите, как разрезать оставшуюся фигуру на две части одинаковой формы, но разных размеров.



(Dick Hess)

Ответ:

Решение. Пример решения:



Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 0 баллов - отсутствие решения. В том числе за решение не засчитываются картинки, по которым невозможно точно восстановить длины сторон фигуры и эти длины не указаны в решении.

5. На доске записано выражение

$$(1 + 2 + 3)(4 + 5 + 6)(7 + 8 + 9) \dots (22 + 23 + 24)$$

Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок выбирает один из знаков «+» и заменяет его на «-». Каждый игрок делает ровно 4 хода. Петя выигрывает, если после восьми ходов значение получившегося выражения положительно, а Вася — если отрицательно. Если оно равно 0 — партия заканчивается вничью. Кто из игроков может гарантировать себе победу?

(К. А. Кноп)

Ответ: Выигрывает Вася.

Решение. Посмотрим, что происходит с одной скобкой, кроме первой. Если в ней заменён только один плюс, то её значение положительно. Например, $4 - 5 + 6 = 5$, $4 + 5 - 6 = 3$. Если же заменить оба плюса, получится отрицательное число. Значит, если ни одна скобка не равна нулю, знак всего произведения определяется чётностью числа скобок, в которых заменены оба плюса.

Сначала Вася позаботится о том, чтобы первая скобка никогда не могла обратиться в нуль. Если после первого хода Пети знак между 1 и 2 ещё не заменён, Вася своим первым ходом заменяет именно его. Если же Петя уже заменил этот знак, Вася делает первый ход где угодно. Таким образом, после первого хода Васи в первой скобке знак между 1 и 2 уже заменён на минус. Поэтому впоследствии её значение может быть только $1 - 2 + 3 = 2$ или $1 - 2 - 3 = -4$, и 0 возникнуть не может.

Теперь рассмотрим положение перед последним ходом Васи. Уже сделано 7 ходов. Обязательно есть скобка, в которой заменён ровно один плюс: иначе в каждой затронутой скобке было бы сделано по два хода, а тогда общее число ходов было бы чётным. Кроме того, есть совсем нетронутая скобка: за 7 ходов нельзя затронуть все 8 скобок.

1) Если скобок с двумя минусами чётное число, то Вася добавляет второй минус в скобку, где уже есть один минус. Число таких скобок становится нечётным.

2) Если же скобок с двумя минусами нечётное число, Вася делает ход в нетронутую скобку. Тогда число скобок с двумя минусами не изменяется и остаётся нечётным.

После последнего хода нулевых скобок нет, а число отрицательных скобок нечётно. Поэтому всё произведение отрицательно, и Вася может гарантировать себе победу.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение;
- 6 баллов — полное решение с небольшим недочётом;
- 4 балла — представленная стратегия для Васи верна, но разобраны не все возможные случаи, ключевой случай со скобкой $(1+2+3)$ разобран;
- 3 балла — представленная стратегия для Васи верна, но разобраны не все возможные случаи, ключевой случай со скобкой $(1+2+3)$ не разобран;
- 2 балла — правильный ответ и верные замечания про чётность числа отрицательных скобок или только описание верной стратегии;
- 1 балл — только правильный ответ или только верные замечания о чётности числа отрицательных скобок;
- 0 баллов — нет решения.