



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
6 класс



Решения

1. Братья-хомяки Миша и Гриша пригласили своих друзей-хомяков погрызть семечки. Все хомяки едят семечки с одинаковой скоростью, и запаса хватило бы им ровно на два часа. Но через час после начала один из друзей ушёл, ещё через 15 минут ушёл второй, и далее каждый следующий уходил через 15 минут после предыдущего, пока Миша и Гриша не остались вдвоём. Тогда они догрызли остаток семечек и легли спать. Какое максимальное число друзей могло прийти к ним в гости?

(А. А. Теслер)

Ответ: 7.

Решение. Среднее арифметическое продолжительности поедания должно равняться 2 часам. Значит, кто-то из хомяков сидел дольше двух часов. Поэтому у нас есть четверо, ушедшие через 1:00, 1:15, 1:30, 1:45 — суммарно они «недогрызли» 2,5 часа. Остальные должны это компенсировать. Имеем 2:00, 2:15, 2:30 — уже 45 минут «избытка», осталось 1:45 на двоих, то есть Миша и Гриша закончили в 2 : 52,5. Если добавить ещё одного друга, ушедшего через 2:45, то остаётся только 60 минут на двоих, но тогда Миша и Гриша сидели бы меньше 45 минут (а если ещё друзей добавить, то тем более).

Критерии.

- 7 баллов — полное решение,
- 1 балл — за верный ответ,
- +3 балла — за обоснование того, что 7 друзей быть могло,
- +3 балла — за обоснование того, что 8 или более друзей быть не могло.

2. Выпускники школы магии сдают три экзамена — алмазный, рубиновый и сапфировый. За каждый из них можно получить целое количество баллов от 0 до 20 включительно. В этом году у каждого двух учеников школы результаты хотя бы одного из трёх экзаменов различались (то есть не было двоих с одинаковым набором баллов). А фасад школы украшен 50 камнями — алмазами, рубинами и сапфирами (менее 20 камней каждого

вида). По традиции, выпускник школы получает красный аттестат, если балл за каждый из экзаменов не ниже, чем количество соответствующих камней на фасаде школы. Остальные ученики получают обычный синий аттестат. Накануне выпускного, когда аттестаты были уже напечатаны, с фасада школы упал рубин, и его пришлось срочно заменить сапфиром. Чтобы соблюсти традицию, часть аттестатов пришлось перепечатать. Каково максимальное количество таких аттестатов?

(А. А. Теслер)

Ответ: 36.

Решение. Пусть число алмазов, рубинов, сапфиров равно A, R, S (тогда $A + R + S = 50$), а баллы в аттестате — a, r, s . Перепечатывать надо аттестаты, где $a \geq A$ и при этом либо $r = R - 1, s \geq S + 1$, либо $r \geq R, s = S$. Число комбинаций равно $(21 - A)(20 - S + 21 - R) = xy$ при условии, что $x + y = 62 - (A + S + R) = 12$. Значит, для всех пар чисел x, y , сумма которых равна 12, нужно найти пару с максимальным произведением. Это 36 при $x = y = 6$ (действительно, для чисел 5 и 7 произведение равно 35, для 4 и 8 — 32, для 3 и 9 — 27, для 2 и 10 — 20, для 1 и 11 — 11, для 0 и 10 — 0). Ситуация $x = y = 6$ возможна, например, при $A = 15, S = 17, R = 18$.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 4 балла — ответ с примером того, как могут быть исправлены 36 аттестатов, но без доказательства максимальности.
- 2 балла — верно описано, какие аттестаты подлежат исправлению, но дальнейших существенных продвижений нет.
- 1 балл — только верный ответ 36.

3. 100 умных и воспитанных детей разного роста и с разными фамилиями стоят в ряд в тёмном коридоре. Можно спросить: «Кто выше соседей?» — и те, кто выше своих соседей, назовут свои фамилии (крайний ребёнок назовёт фамилию, если он выше своего соседа). После этого мы можем переставить детей как угодно (назвав фамилии в определённом порядке) и повторить вопрос.

Как нам не более чем за 10 вопросов выяснить:

- а) фамилию самого высокого ребёнка;
- б) фамилии самого высокого и второго по высоте детей?

(К. А. Кноп)

Решение. а) Заметим, что два соседних ребёнка одновременно откликнуться не могут, то есть в первый раз откликнутся не более 50 детей, в том

числе самый высокий. Поставим их в начало, а остальных в конец, и далее будем учитывать только ответы первых 50 детей. Из них откликнутся не более 25, ставим их в начало; в третий раз откликнутся не более 13; далее — не более 7, не более 4, не более 2, не более 1. Ура, после 7 просьб останется только один ребёнок, он и есть самый высокий (поскольку самый высокий всегда откликается).

б) Будем делить детей на три группы: 1) группа в которой есть первый; 2) группа, где нет первого, но может оказаться второй; 3) группа, где нет ни того, ни другого. Заметим, что если ребёнок из группы 1 не откликнулся, то его можно перевести в группу 2; если ребёнок из группы 2 не откликнулся и не стоит на границе с группой 1, то его можно перевести в группу 3. Будем после каждого раза переставлять детей в порядке "группа 1, группа 3, группа 2". Изначально все дети в группе 1. После первого вопроса 50 останется в группе 1 (если откликнутся менее 50, то просто добавим до 50 для единообразия), а 50 перейдут в группу 2. После второго — 25 в группе 1 и не более $25 + 26 = 51$ в группе 2. После третьего — 13 и $12 + 26 = 38$. После четвёртого — 7 и $6 + 19 = 25$. После пятого — 4 и $3 + 13 = 16$. После шестого — 2 и $2 + 8 = 10$. После седьмого — 1 и $1 + 5 = 6$. Последними тремя вопросами вторая группа доводится до 1 человека.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 3 балла — только пункт а).

4. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расположить на доске 25×25 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного коня по непобитым ладьями клеткам? (Ладья бьёт клетку, на которой она стоит; начальная и конечная угловые клетки пути коня также не должны быть побиты ладьями.)

(С. А. Лучинин)

Ответ: 11.

Решение. Пронумеруем числами от 1 до 25 строчки снизу вверх и столбцы слева направо. Тогда клетка с координатами (a, b) находится в a -ом столбце и b -ой строке. В качестве примера поставим ладей в клетки $(2, 4), (4, 6), (6, 8), \dots, (22, 24)$. Тогда существует путь коня по непобитым клеткам: $(1, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (5, 1) \rightarrow (7, 2) \rightarrow (9, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (25, 1) \rightarrow (24, 3) \rightarrow (25, 5) \rightarrow \dots \rightarrow (25, 25)$.

Докажем, что 12 ладей не получится поставить. Предположим, что первый ход коня идёт в клетку $(2, 3)$ (с клеткой $(3, 2)$ аналогично). Тогда

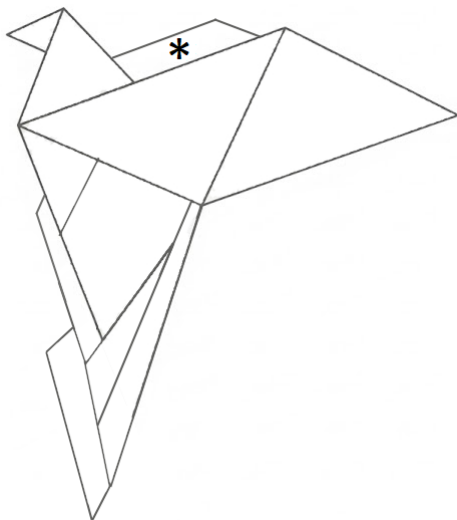
мы не можем поставить ладей в 1-й и 2-й столбец. Также нельзя поставить ладью в 25-й столбец. Разобьём остальные столбцы на пары: $3 - 4, 5 - 6, \dots, 23 - 24$. В каждой паре столбцов стоит не более одной ладьи, так как иначе конь не сможет «перепрыгнуть» эти два столбца и оказаться в 33-м столбце. Следовательно, ладей не более 11.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 3 балла — приведён пример расстановки 11 ладей и описан путь коня по непобитым клеткам.
- Ещё 4 балла — доказано, что больше 11 ладей расставить нельзя.

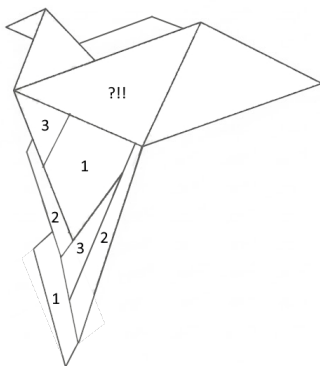
5. Вася всегда врёт 1-го и 28-го числа каждого месяца, а также по четвергам; в остальные дни он говорит правду. Позавчера Вася нарисовал в тетрадке голубя (см. рис.), а потом разделил четырёхугольник, отмеченный звёздочкой, на несколько фигур. После этого Вася сказал, что может раскрасить все фигуры, из которых состоит получившийся рисунок, в один из трёх цветов так, что одноцветные части не имели общих сторон.

Вчера Вася сообщил, что существует ровно 115 200 способов покрасить его рисунок таким же образом, но в 4 цвета. А сегодня сказал: «Сегодня наступил новый месяц!». Определите сегодняшнее число, месяц и день недели.



Ответ: 2 марта, четверг.

Решение. Первое утверждение Васи ложно. Действительно, вокруг фигуры Е расположено кольцо из 5 фигур. Если Е имеет цвет 1, то пять фигур вокруг неё должны иметь чередующиеся цвета 2 и 3, но для нечётного числа фигур такое чередование невозможно.



Второе утверждение также неверно. Если убрать треугольники А и Г, каждый из которых имеет только одного соседа, то количество раскрасок оставшейся фигуры должно делиться на $4! = 24$, поскольку цвета можно произвольным образом поменять между собой. Два верхних треугольника увеличивают количество раскрасок в 9 раз (для каждого из них по 3 варианта). Тогда число раскрасок должно делиться на 216, но 115 200 не делится.

Третье утверждение не может быть сказано первого числа, поэтому оно тоже неверно. Три дня подряд Вася мог врать, только если эти дни — 28-е, 1-е и четверг в каком-то порядке. 1-е не в конце, но и не в начале (иначе 28-е не попадёт). Значит, в середине (вчера) 1-е, перед ним 28-е, а сегодня четверг. Получается, дело на рубеже февраля (невисокосного) и марта. Ответ: сегодня 2 марта, четверг.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- По 2 балла за каждую из частей: 1) доказано, что первое утверждение неверно; 2) доказано, что второе утверждение неверно; 3) исходя из неверности этих утверждений проделаны календарные расчёты и получен ответ.