



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
5 класс



Решения

1. На празднование своего дня рождения Миша пригласил трёх друзей и купил огромный торт, который Миша с друзьями обычно съедали за полчаса (скорость поедания торта у всех одинаковая). Но в этом году через 15 минут после начала трапезы Мише позвонила бабушка, и он был вынужден отвлечься от торта. Остальные как ни в чём не бывало продолжили есть, не останавливаясь, и опомнились только через 10 минут, когда Миша договорил по телефону и вернулся к друзьям. В этот момент ребята остановились и решили оставить весь оставшийся торт Мише. Какое время понадобится Мише, чтобы доесть оставшийся кусок торта?

(А. Н. Мухаметвалиева)

Ответ: 30 минут

Решение.

Скажем, что весь торт состоит из 12 частей. Так как за 30 минут четыре человека съедают весь торт, то один человек за 30 минут съедает четверть всего торта, то есть $12/4 = 3$ части. Тогда, за 10 минут один человек съедает 1 часть торта.

Так как 15 минут – это половина от обычного времени поедания торта, то через 15 минут после начала трапезы будет съедена половина, и останется ещё половина, то есть $12/2 = 6$ частей. За 10 минут, пока Миша говорит по телефону, остальные ребята съедят 3 части, и Мише останется ещё $6 - 3 = 3$ части. Это четверть всего торта, которую Миша съест за полчаса.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение
- 5 баллов — получено, что Мише останется четверть торта, но не получен ответ.
- +2 балла — в какой-либо форме получено, что за 10 минут человек съедает $1/12$ часть торта
- 1 балл — получено, что через 15 минут останется половина торта

2. Есть 20 одинаковых на вид монет: ровно 10 лёгких и 10 тяжёлых. Весы позволяют сравнивать по весу только одну монету с одной. Можно ли за 10 взвешиваний гарантированно найти хотя бы одну лёгкую и хотя бы одну тяжёлую монету?

(К. А. Кноп)

Ответ: Да, можно.

Решение.

Выберем одну любую монету и будем взвешивать её по очереди с 9 другими, на это мы потратим 9 взвешиваний.

Если хотя бы одно из взвешиваний показывает неравенство, то в этом взвешивании участвуют две различных монеты, причём мы понимаем, какая из них лёгкая, а какая – тяжелая.

Если же все 9 взвешиваний показали равенство, то мы нашли 10 одинаковых монет (одна выбранная нами и ещё 9, с которыми она взвешивалась). Значит, оставшиеся 10 монет также одинаковые между собой и отличаются по весу от найденных десяти. Осталось взвесить одну из найденных монет с одной из оставшихся, чтобы понять, какая из них лёгкая, а какая – тяжелая. На это мы потратим оставшееся десятое взвешивание.

Решение 2.

Выберем одну монету и будем сравнивать её с 10 другими монетами по очереди. Так как всего монет того же веса, что и выбранная, ровно 10, включая её саму, среди этих монет обязательно найдётся хотя бы одна монета другого веса. Значит, хотя бы одно из десяти взвешиваний покажет неравенство. В этом взвешивании мы сразу определим одну лёгкую и одну тяжёлую монету.

Следовательно, задача решается за 10 взвешиваний.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 5 баллов — показано, как найти 10 одинаковых монет за 9 взвешиваний.
- 4 балла — верный алгоритм без пояснений.
- 2 балла — написана идея зафиксировать одну монету.

3. Дядька Черномор вывел на берег 533 богатыря и назвал им натуральное число P . После этого он попросил каждого начертить на песке прямоугольник с натуральными сторонами и периметром, равным P . Все прямоугольники оказались различными, причём Черномор заметил, что если бы богатырей было 534, то обязательно нашлись бы два одинаковых

прямоугольника. Какое число P мог назвать Черномор? Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет. Прямоугольники, отличающиеся друг от друга поворотом, считаются одинаковыми.

(А. Н. Мухаметвалиева)

Ответ: $P = 2132$ и $P = 2134$.

Решение.

Из условия следует, что существует ровно 533 различных прямоугольника с периметром P . Периметр прямоугольника с целыми сторонами a и b равен $2(a + b)$, то есть P является чётным числом. $P/2 = a + b$, тогда меньшее из чисел a и b может принимать любые целые значения от 1 до $\frac{a+b}{2}$, то есть, от 1 до $\frac{P}{4}$, так как не должна превышать половину от $(a + b)$. Тогда, $533 \leq \frac{P}{4} < 534$, а значит, $2132 = 533 \cdot 4 \leq P < 534 \cdot 4 = 2136$. Так как P может принимать только чётные значения, то ответом являются числа 2132 и 2134.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 5 баллов — верное решение, но забыт один из ответов.
- 4 балла — показано, что прямоугольников с периметром P может быть не больше $\frac{P}{4}$, но ответов не получено.
- 2 балла — найдены оба верных ответа без пояснений.

4. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга слонов можно расположить на доске 100×100 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного короля по непобитым слонами клеткам? Слон бьёт все клетки по каждой диагонали, на которой стоит; король может переходить в любую клетку, имеющую с его клеткой общую сторону или вершину. Слон также бьёт клетку, на которой он стоит; стартовая и конечная угловые клетки пути короля также не должны быть побиты слонами.

(С. А. Лучинин)

Ответ: 99.

Решение. Оценка:

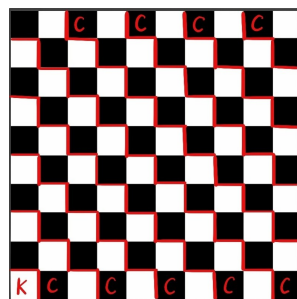
Покажем, что больше 99 слонов поставить не удастся. Покрасим доску в шахматную раскраску так, что левый нижний угол белого цвета. Разобьём все диагонали, идущие слева направо и сверху вниз, на пары подряд идущих. При этом начальную клетку короля (левый нижний угол) оставим без пары. У нас получится 99 пар диагоналей, в каждой из которых

одна чёрная и одна белая диагональ. Пример такого разбиения для доски 10×10 показан на рисунке.

Своим ходом король может переместиться в одну из соседних пар диагоналей или остаться в той же. Значит, при перемещении из левого нижнего угла в правый верхний король точно побывает в каждой паре хотя бы один раз. А значит, в каждой паре хотя бы одна из диагоналей не должна содержать слона. В стартовой клетке, оставшейся без пары, также не может стоять слон. По условию слоны не бьют друг друга, значит, на диагонали может стоять максимум один слон. Итого, в каждой из 99 пар диагоналей стоит не больше одного слона, и всего слонов не больше 99.

Пример:

Заметим, что слон может бить только клетки того цвета, на котором стоит. Поставим слонов во все чёрные клетки нижней строки и во все чёрные клетки верхней строки кроме самой левой. Всего получится $50 + 49 = 99$ слонов, бьющих только чёрные клетки и не бьющих друг друга. Теперь скажем, что король пройдёт из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь по главной диагонали. Клетки этой диагонали белые, а значит, не могут быть побиты слонами, стоящими на чёрных клетках.



Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 6 баллов — верные оценка и пример без пояснений по маршруту короля.
- 4 балла — полная оценка без примера.
- 3 балла — верный доказанный пример без оценки.
- 2 балла — верная расстановка слонов без пояснений по маршруту короля.

5. Для каких цифр x можно представить четырёхзначный палиндром $x00x$ в виде суммы нескольких трёхзначных палиндромов? Палиндром — это число, которое слева направо и справа налево читается одинаково.

(М. А. Усачёв)

Ответ: Для всех x от 2 до 9.

Решение.

Для начала докажем, что число 1001 представить не удастся. Предположим, что число 1001 удалось представить в виде суммы нескольких

трёхзначных палиндромов. Тогда сумма последних цифр этих трёхзначных палиндромов должна оканчиваться на 1. Равняться 1 сумма последних цифр не может, так как палиндром не может заканчиваться на 0, а складываем мы хотя бы два палиндрома – сумма последних цифр должна быть не меньше 2. Тогда сумма последних цифр хотя бы 11, но тогда сумма цифр в разряде сотен наших палиндромов тоже будет хотя бы 11, чего быть не может, так как тогда сумма самих палиндромов будет больше 1100. Противоречие.

Покажем, как представить числа 2002, 3003, ..., 9009. Для числа 2002 возьмём одиннадцать раз палиндром 171 и один раз 121. Получим $2002 = 11 \cdot 171 + 121$. Теперь аналогичным образом запишем представление числа 3003. Возьмём двадцать два раза палиндром 131 и один раз 121. Получим $3003 = 22 \cdot 131 + 121$.

Заметим теперь, что любой другой палиндром вида $\overline{x00x}$ получается сложением палиндромов 2002 и 3003, а значит, мы можем взять в качестве слагаемых для $\overline{x00x}$ трёхзначные палиндромы из представления 2002 и 3003 и сложить их нужное количество раз:

$$\begin{aligned} 4004 &= 2002 + 2002, & 5005 &= 2002 + 3003, \\ 6006 &= 3003 + 3003, & 7007 &= 2002 + 2002 + 3003, \\ 8008 &= 3003 + 3003 + 2002, & 9009 &= 3003 + 3003 + 3003 \end{aligned}$$

Замечание. Как можно придумать такое разложение на слагаемые: отметим, что если к числу 101 добавить 10, 20, ..., 90, то получившееся число все ещё будет палиндромом. Попробуем это использовать для построения примера на 2002 и 3003.

Представим число 2002, как $101a + 10b$, а затем "раскидаем" оставшиеся десятки ($10b$) по a слагаемым 101. Так как 2002 заканчивается на 2, а $10b$ на последнюю цифру суммы никак не влияет, то $101a$ должно оканчиваться на 2, то есть a должно оканчиваться на 2. Значит a равняется либо 2, либо 12. При $a = 12$ получается, что $2002 = 101 \cdot 12 + 79 \cdot 10$. Далее "раскидаем" получившиеся 79 десятков. $2002 = 171 \cdot 11 + 121$.

Повторим операцию, что и в случае выше, для числа 3003. $3003 = 101 \cdot 23 + 68 \cdot 10 = 131 \cdot 22 + 121$.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 3 балла — приведён пример разложения чисел 2002, ..., 9009.
- 3 балла — доказано, что 1001 не представимо.
- 1 балл — для 1001 доказано, что сумма последних цифр трёхзначных палиндромов должна быть меньше 11.

- 1 балл — приведён отдельный корректный пример.