

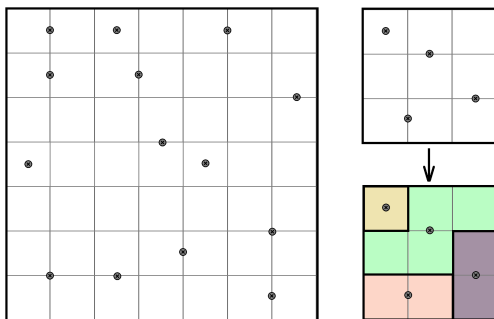


Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
4 класс

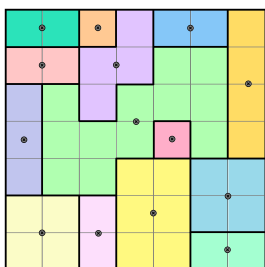


Решения

1. У папы есть фанерная доска 7×7 , в которую вкручены 14 шурупов, как показано на рисунке. Он хочет распилить её на фигуры по границам клеток так, чтобы в каждой фигуре содержался ровно один шуруп, причём если повернуть фигуру вокруг шурупа на пол-оборота, она должна возвратиться в исходное положение. Покажите, как это сделать. (Справа показано решение такой же задачи для доски 3×3 .)



(*Jim Bumgardner*)



Ответ:

Критерии.

- [7] Полное корректное разбиение: каждая часть содержит ровно один шуруп и центрально симметрична относительно него. Допускается любое верное разбиение, не только авторское.

- [4] Существенная часть корректной конструкции (примерно половина доски или больше) и виден способ продолжения, но полное разбиение не получено/не подтверждено.
- [2] Построено несколько корректных центрально-симметричных частей, но глобальной конструкции нет.
- [1] Есть только локальное правильное понимание центральной симметрии или одна изолированная корректная часть.
- [0] Содержательного продвижения нет.
- [ручная] Если часть рисунка закрыта/границы неразличимы и это мешает проверить разбиение, не угадывать балл: «требуется ручной проверки».

2. Кайл Риз, отец Джона, только что отправился в прошлое. Сара — мама Джона. Если вычесть из её возраста сейчас возраст Кайла в прошлом, получится 37 лет; если вычесть из возраста Джона сейчас возраст его мамы в прошлом, получится 25 лет; а если вычесть из возраста Кайла сейчас возраст Сары в прошлом, получится 7 лет. Считая, что путешествие мгновенно, определите, на сколько лет в прошлое отправился Кайл?

(Л. Ю. Ярмагаев)

Ответ: 44

Решение. Пусть S — текущий возраст Сары, а t — количество лет, на которое совершен прыжок в прошлое.

1. Так как прыжок мгновенный, возраст Кайла неизменен. Исходя из первого условия, возраст Кайла (и сейчас, и в прошлом) равен $S - 37$.
2. Возраст Сары в прошлом равен $S - t$.
3. Используя третье условие, составляем уравнение, исключая переменную возраста Кайла:

$$(S - 37) - (S - t) = 7$$

$$S - 37 - S + t = 7$$

$$t - 37 = 7$$

$$t = 44$$

Условие о возрасте Джона для решения не нужно.

Критерии.

- [7] Получено 44 года с корректным объяснением. Условие про Джона можно не использовать.

- [4] Верно установлены практически все ключевые соотношения и ход к ответу 44, но решение не завершено; не относится к ошибке $44 \rightarrow 22$.
- [3] Получено $37 + 7 = 44$ (или эквивалентное правильное ключевое соотношение), но затем 44 ошибочно делится на 2 и даётся ответ 22.
- [2] Есть одно существенное правильное соотношение, но до 44 решение не доходит.
- [1] Только правильный ответ 44 без объяснения либо совсем малое верное продвижение.
- [0] Нет содержательного продвижения.

3. Сегодня 13 сентября 2026 года, то есть 13.09.2026. Разобьём эту запись на четыре числа: 13, 09, 20 и 26.

Первое и третье числа (13 и 20) различаются на 7, а второе и четвёртое (9 и 26) — на 17. Оба полученных числа (7 и 17) оканчиваются на одну и ту же цифру.

Сколько всего дат в 2026 году обладают таким же свойством: разность первого и третьего числа и разность второго и четвёртого числа оканчиваются на одинаковую цифру?

(В. Н. Галиulina)

Ответ: 37

Решение.

Какая бы цифра на конце ни получилась в первом вычитании, в месяце всегда есть ровно 3 дня, которые дадут такую же цифру при вычитании с 20. Например, если нам нужна цифра 5, то подойдут дни 5, 15 и 25 (потому что $20 - 5 = 15$, $20 - 15 = 5$, $25 - 20 = 5$).

Даже в коротком феврале правило работает. Для февраля (2-й месяц) нужна цифра 4 ($26 - 2 = 24$). Подходят 6, 16 и 24 числа, и они все есть в феврале. Значит, в каждом из 12 месяцев точно есть по **3 даты**.

2. 31-е число

У 31-го числа разница с 20 равна 11 ($31 - 20 = 11$). Она оканчивается на 1. Значит, 31-е число станет 4-й подходящей датой только в том месяце, где 26 — Месяц тоже оканчивается на 1. Это **май** ($26 - 5 = 21$).

3. Считаем итог

В мае 4 такие даты, а в остальных 11 месяцах — по 3.

$11 \times 3 + 4 = 37$ дат.

Критерии.

- [7] Ответ 37 и полное обоснование: по 3 даты в каждом месяце, плюс дополнительная дата 31 мая.

- [6] Полный правильный метод и почти полная проверка, но один мелкий арифметический/технический недочёт, не меняющий сути.
- [5] Правильный общий метод и итог 37, но несколько локальных ошибок/пропусков в перечислении, случайно компенсировавшихся или не влияющих на основную идею.
- [4] Доказано по 3 даты в каждом месяце ($=36$), но пропущена дополнительная дата 31 мая.
- [2] Найдена правильная закономерность последних цифр или есть заметное частичное перечисление без полного подсчёта.
- [1] Только ответ 37 без обоснования или несколько отдельных подходящих дат.
- [0] Нет содержательного продвижения.

4. Ленивый Костя читает книжку следующим образом: читает одну страницу, одну пропускает, затем снова читает одну, после неё пропускает две, затем снова читает одну и так далее, каждый раз пропуская на одну страницу больше, чем в прошлый раз. Оказалось, что он прочитал и первую, и последнюю страницы книги. Могло ли в книге быть ровно 2026 страниц?

(В. Н. Галиуллина)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Костя прочитал n страниц. Тогда он пропустил $1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$ страниц. Значит, всего в книге $n(n+1)/2$ страниц. Но при $n = 63$ получаем 2016, что меньше 2026, а при $n = 64$ получаем 2080, что уже больше 2026.

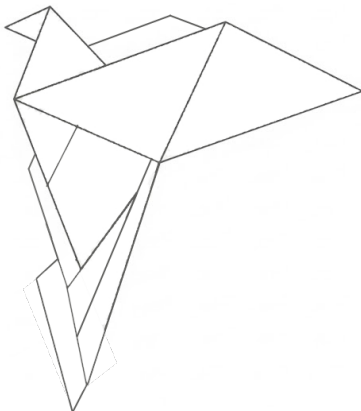
Критерии.

- [7] Использованы треугольные числа/формула $n(n+1)/2$ либо эквивалентное полное перечисление; показано $2016 < 2026 < 2080$, поэтому ответ «нет».
- [6] Метод полностью правильный, но есть единичный арифметический или индексный сдвиг (например, 2015/2079 вместо 2016/2080), при котором логика решения сохраняется.
- [4] Правильная идея треугольных чисел или формула есть, но проверка окрестности 2026 не доведена/содержит существенный недочёт.
- [3] Получено существенное частичное продвижение: например, найдено 2016 или корректно построена большая часть последовательности, но невозможность не доказана.

- [2] Выписана последовательность $1, 3, 6, 10, \dots$ или есть другое осмысленное начало правильного решения.
- [1] Только правильный ответ «нет» без обоснования либо минимальное продвижение.
- [0] Нет содержательного продвижения.

5. Вася всегда врёт по средам, четвергам и воскресеньям. Сегодня, придя со школьных уроков, Вася показал в тетрадке голубя (см. рис.) и сказал, что раскрасил все части, из которых состоит голубь, в один из трёх цветов так, что одноцветные части не имели общих сторон.

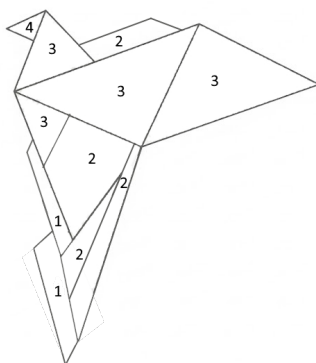
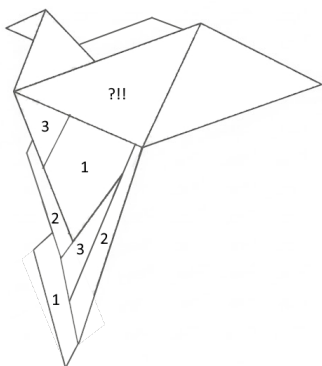
Вчера же Вася утверждал, что всего способов покрасить этого голубя таким же образом, но в 4 цвета — 5184. Какой сегодня день недели?



(Л. Ю. Ярмагаев)

Ответ: Среда

Решение. Первое его утверждение ложно — начнем красить, начиная с цвета 1, как показано на рисунке слева.



Получим противоречие. Проверим второе утверждение — начнем считать варианты, начиная с головы, как показано на рисунке справа. Не попадаемся в ловушку при заполнении хвоста, расставляем циферки, не забываем, что циферки перемножаются, а не складываются, и получаем, что всего вариантов действительно 5184. Значит, сегодня Вася соврал, а вчера сказал правду. Комбинаций дней, когда такое может быть две — вторник-среда и суббота-воскресенье. Но поскольку в воскресенье дети в школу не ходят, сегодня среда.

Критерии.

- [7] Полностью выполнены три компонента: (i) доказана невозможность правильной 3-раскраски; (ii) число правильных 4-раскрасок получено как 5184; (iii) календарный вывод приводит к среде, воскресенье исключено условием про школу.
- [5] Два крупных компонента выполнены полностью, третий существенно начат; типичный случай: верны невозможность 3 цветов и подсчёт 5184, но календарный вывод неполон.
- [3] Есть один полный крупный компонент и существенное продвижение во втором; либо корректный календарный вывод из частично установленных истинностных статусов.
- [2] Есть содержательная часть: например, доказана невозможность 3 цветов, или корректно начат подсчёт 4-раскрасок, или получен почти полный календарный разбор.
- [1] Только правильный итог «среда» без доказательства либо небольшое осмысленное продвижение.
- [0] Нет содержательного продвижения.