



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
11 класс



Решения

1. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки E и F — середины BC и CD соответственно. Оказалось, что $AE \perp BD$. Докажите, что AF не перпендикулярно BD .

(А. А. Сольинин)

Ответ: 42.

Решение 1. Допустим противное. Тогда и $EF \perp BD$. Но это невозможно, так как EF — средняя линия в треугольнике BCD , и $EF \parallel BD$.

Решение 2. Допустим противное. Пусть $a = \vec{AB}$, $b = \vec{AC}$, $c = \vec{AD}$. Тогда $a + b \perp a - c$ и $b + c \perp a - c$. Считаем скалярное произведение: $a^2 + ab - ac - bc = 0$, $c^2 + bc - ac - ab = 0$. Складывая, получим $a^2 + c^2 - 2ac = 0$, т.е. $(a - c)^2 = 0$, что невозможно.

Критерии.

- 7 баллов — полное корректное доказательство любым способом. Очевидная локальная описка в обозначениях, если дальнейшее рассуждение однозначно показывает правильный смысл и логика доказательства не меняется, балл не снижает.
- 5 баллов — практически полное решение: ключевая идея и основная цепочка доказательства найдены, но имеется один локально исправимый пробел, неверно сформулированный шаг или систематическая локальная ошибка в обозначениях; после исправления доказательство сразу замыкается без новой идеи.
- 3 балла — найдена существенная идея конечного противоречия или значительная часть правильной конструкции, но отсутствует важное обоснование, требующее отдельного содержательного шага.
- 1 балл — имеется отдельное содержательное продвижение, прежде всего $EF \parallel BD$ (или эквивалентный ему факт), но дальнейшее рассуждение не приближает существенно к завершению.
- 0 баллов — содержательного продвижения нет, решается другая задача либо доказательство опирается на ложное ключевое утверждение, после удаления которого правильная цепочка не остаётся.

2. В клубе 100 джентльменов, четверо из которых — Алекс, Боб, Чарльз и Дейл. Распад клуба происходит следующим образом: часть джентльменов покидает клуб и основывает новый в другом месте. Затем то же происходит с одним из двух получившихся клубов и так далее, пока каждый джентльмен не окажется предоставлен самому себе. Все полные последовательности таких разделений, приводящие к 100 одночленным клубам, считаются равновероятными. С какой вероятностью наступит момент, когда Алекс и Боб окажутся вместе в одном клубе, а Чарльз и Дейл — тоже вместе, но в другом?

(М. А. Антипов, А. А. Солянин)

Ответ: $1/9$.

Решение. Запустим обратный процесс — пусть сперва клубы состоят из 100 одиночных джентльменов, а потом объединяются. Будем следить только за теми объединениями, которые затрагивают кого-либо из нашей четвёрки.

Какая из шести пар AB , AC , AD , BC , BD , CD объединится первой, по симметрии равновероятно. Чтобы требуемая ситуация когда-нибудь возникла, первой должна объединиться либо пара (AB) , либо пара (CD) . Вероятность этого равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пусть, например, первыми объединились (A) и (B) . Теперь с точки зрения четырёх отмеченных джентльменов имеются три клуба: AB , C , D . При следующем объединении двух из этих трёх клубов все три пары снова равновероятны. Требуемая ситуация возникнет в точности тогда, когда объединятся (C) и (D) , а не один из них с клубом (AB) . Вероятность этого равна $\frac{1}{3}$. Перемножив эти вероятности, получаем требуемое.

Критерии.

• **7 баллов.** Полное решение. В частности, принимаются оба основных типа доказательства: 1) обратный процесс слияний, в котором обосновано, что первая существенная пара среди AB, AC, AD, BC, BD, CD равновероятна; после появления, например, AB следующая существенная пара среди AB, C, D также равновероятна, откуда

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

2) прямой подсчёт редуцированных историй четырёх отмеченных джентльменов: 12 историй типа $1 + 3$ и 6 историй типа $2 + 2$, всего 18, из которых благоприятны ровно две.

Допускаются и другие корректные способы.

• **4 балла.** Почти полное решение с существенным, но локализованным пробелом. Например, получен верный ответ и построена правильная редукция к четырём отмеченным, но центральная равновероятность нужных редуцированных событий лишь заявлена; либо корректно разобран один из двух симметричных порядков $AB \rightarrow CD$ и $CD \rightarrow AB$, но второй порядок не учтён.

• **2 балла.** Есть содержательное продвижение: выделена четвёрка отмеченных, правильно замечено, что после “неправильного” существенного разделения нужная конфигурация невозможна, перечислены типы $1 + 3$ и $2 + 2$ или парные разбиения, но вероятностная модель неверна.

• **1 балл.** Указан только верный ответ $\frac{1}{9}$ без содержательного обоснования (или с одной лишь декларацией “рассмотрим обратный процесс”).

• **0 баллов.** Нет содержательного корректного продвижения по задаче.

3. Андрей выписал на доску несколько (не менее трёх) последовательных натуральных чисел. Некоторые числа он написал красным маркером, а остальные — синим. Оказалось, что НОК красных чисел в 70 раз больше НОК синих чисел. Докажите, что разность каких-то двух разноцветных чисел является натуральной степенью тройки.

(А. А. Солянин)

Решение 1. Рассмотрим все выписанные Андреем числа с максимальным вхождением тройки. Их не менее двух (одно красное, другое синее). И не более двух, потому что среди любых трёх подряд идущих чисел, кратных 3^k , найдётся число, кратное 3^{k+1} . Значит, это должны быть числа $x \cdot 3^k$ и $(x + 1) \cdot 3^k$. Они-то и отличаются на 3^k .

Кстати, такой набор чисел существует — числа от 3 до 8. Красные числа — 3, 5, 7, 8, синие — 4 и 6.

Решение 2. Допустим противное. Пусть a — выписанное число, кратное 3 (такое точно существует). Тогда $a + 3$ и $a - 3$, если выписаны, должны быть того же цвета, что a (иначе образуются разноцветные числа с разностью 3). Продолжая далее, видим, что все числа, кратные 3, покрашены в один цвет. Но тогда НОК чисел одного цвета кратен 3, а НОК чисел другого не кратен, и их отношение не может быть равно 70.

Критерии.

• **7 баллов.** Полное корректное доказательство.

• **5 баллов.** Получено равенство максимальных 3-адических показателей двух НОК и установлено (или фактически используется), что соответствующая степень 3^k встречается у чисел обоих цветов, но не доказан

локальный завершающий шаг: выбор соседних кратных 3^k разных цветов, дающий разность ровно 3^k .

• **3 балла.** Доказана одна из ключевых редукций, но основная связка не завершена. Например, корректно доказано равенство v_3 двух НОКов либо одноцветность каждого класса вычетов по модулю 3 при отсутствии разноцветной пары на расстоянии 3, а дальнейшее рассуждение существенно неверно или отсутствует.

• **1 балл.** Есть наблюдение о множителе 70, делимости на 3, кратных тройке или предполагаемой разности 3, но нет корректного содержательного продвижения, достаточного для ключевой редукции.

• **0 баллов.** Существенного верного продвижения нет. В частности, не засчитывается рассуждение, использующее лишь $1 = 3^0$.

4. На координатной плоскости отмечено несколько точек с целыми координатами. Оказалось, что все расстояния между ними иррациональны. Обязательно ли можно добавить ещё одну точку с целыми координатами так, чтобы все расстояния между отмеченными точками по-прежнему были иррациональными?

(А. А. Солянин)

Ответ: Да.

Решение. Пусть отмечены точки

$$A_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Выберем целое число c , отличное от всех y_i , и будем искать новую точку в виде $P = (N, c)$, где N — достаточно большое целое число. Для каждой точки A_i положим $d_i = |c - y_i| > 0$, $s_i = |N - x_i|$. Тогда $PA_i^2 = s_i^2 + d_i^2$.

Выберем N настолько большим, чтобы для всех i выполнялось $d_i^2 < 2s_i + 1$. Тогда

$$s_i^2 < s_i^2 + d_i^2 < (s_i + 1)^2.$$

Значит, PA_i^2 не является квадратом целого числа.

Но квадрат расстояния между двумя точками с целыми координатами — целое число. Если само расстояние рационально, то оно обязано быть целым. Следовательно, каждое расстояние PA_i иррационально. Все прежние расстояния не изменились, поэтому такую точку всегда можно добавить.

Критерии.

- **7 баллов.** Полное корректное доказательство существования новой точки с целыми координатами, имеющей иррациональные расстояния до всех исходных точек.
- **5 баллов.** Решение по существу полное, но содержит локальный исправимый дефект, не требующий новой идеи.
- **3 балла.** Есть правильная существенная идея решения, но отсутствует центральное обоснование.
- **1 балл.** Получен правильный вспомогательный факт, но практически нет работающего механизма построения новой точки. В частности, не доказано, что можно одновременно избежать всех запрещённых положений.
- **0 баллов.** Нет содержательного продвижения, либо основная идея неверна.

5. Непрерывная функция f определена при всех x и удовлетворяет соотношению $f(f(x)) = f(x) + 3x$. Может ли оказаться, что $f(4) = 3$?

(А. А. Сольнин)

Ответ: Не может.

Решение. Сначала заметим, что функция f инъективна. Действительно, если $f(x) = f(y)$, то $f(f(x)) = f(f(y))$. По условию $f(x) + 3x = f(y) + 3y$, откуда $x = y$.

Непрерывная инъективная функция на всей прямой строго монотонна. Предположим теперь, что $f(4) = 3$. Подставляя $x = 4$, получаем $f(3) = f(f(4)) = f(4) + 12 = 15$. Так как $3 < 4$, но $f(3) > f(4)$, функция f должна быть строго убывающей.

Теперь подставим $x = 3$: $f(15) = f(f(3)) = f(3) + 9 = 24$. Но $4 < 15$, поэтому для убывающей функции должно выполняться $f(4) > f(15)$, то есть $3 > 24$, что невозможно. Следовательно, $f(4) \neq 3$.

Критерии.

- [7 баллов] Полное корректное доказательство.
- [5 баллов] Основная схема доказана, но имеется один локальный, легко исправимый пропуск или недописан последний непосредственный переход.
- [4 балла] Существенное продвижение, но отсутствует центральный логический мост. Типичные примеры: верно получены $f(3) = 15$, $f(15) = 24$ и используется монотонность, но она не доказана; либо по непрерывности найдено повторное значение, но не доказана инъективность, необходимая для противоречия.

- [2 балла] Нетривиальное верное продвижение (ключевые итерации, инъективность, полезное следствие уравнения, верная идея промежуточного значения). Дальнейшее рассуждение содержит принципиальную ошибку и не даёт доказательства.
- [1 балл] Только правильный ответ или попытка, основанная на необоснованном сужении класса функций (например, рассмотрен только линейный/полиномиальный случай).
- [0 баллов] Неверный ответ, отсутствие содержательного продвижения.