



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
10 класс



Решения

1. Натуральное число n^n имеет ровно 65 делителей (включая 1 и само число). Чему может быть равно n ?

(К. А. Кноп)

Ответ: 16.

Решение. Если число имеет 65 делителей, то либо это p^{64} , либо $p^4 q^{12}$. Во втором случае степень максимум четвёртая, т.е. $n \leq 4$, и он не подходит. В первом случае $n = p^k$, и тогда $k \cdot p^k = 64$. Отсюда $n = 16$.

Критерии.

- **7 баллов.** Полное решение: корректно классифицированы числа с 65 делителями (случаи p^{64} и $p^{12}q^{12}$, с перестановкой показателей), из условия, что число имеет вид n^n , получено $n = 16$, и второй тип полностью исключён.
- **6 баллов.** По существу полное решение с локальным исправимым дефектом: описка в ответе или вычислении, неточная формулировка при исключении одного случая, пропущено короткое обоснование, не меняющее схему решения.
- **3 балла.** Корректно разобран однопростой случай $n^n = p^{64}$ и получено $n = 16$, но случай двух простых множителей не рассмотрен или не исключён строго.
- **2 балла.** Верно получена существенная классификация из формулы числа делителей (например, формы p^{64} и $p^{12}q^{12}$), но связь с n^n не доведена до корректного решения или n не найдено.
- **1 балл.** Верный ответ 16 без доказательства единственности либо только проверка, что $n = 16$ подходит; возможны слабые содержательные продвижения, не дающие основного разбора.
- **0 баллов.** Неверный ответ, решение другой задачи либо отсутствие содержательного корректного продвижения.

2. Окружность касается сторон угла в точках A и B . Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 12. Найдите сумму

расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний на 7 больше другого.

(К. А. Кноп)

Ответ: 25

Решение. Обозначим через D и E проекции точки C на стороны угла, которым принадлежат A и B . Пусть также K – проекция C на AB . Докажем, что треугольники CDK и CEK подобны. Прежде всего, четырёхугольники $CDAK$ и $CEBK$ являются вписанными. Углы DCK и KCE равны, так как равны противоположные им углы этих четырёхугольников. Далее, $\angle DKC = \angle DAC$ по свойству вписанных углов. Поскольку DA – касательная, угол равен вписанному углу, опирающемуся на дугу AC , то есть углу ABC . Однако этот угол, будучи равен KBC , равен также KEC . Тем самым, два рассмотренных выше треугольника подобны по двум углам.

Теперь можно заключить, что $DC/CK = KC/CE$, то есть $CD \cdot CE = CK^2 = 144$. Мы при этом знаем, что $|CD - CE| = 7$. Отсюда по теореме Виета делается вывод, что эти расстояния 9 и 16.

Критерии.

- **7 баллов.** Полное решение: ключевое геометрическое соотношение $d_1 d_2 = h^2$ (или эквивалентное ему) доказано, дальнейшая алгебра выполнена корректно, получен ответ 25.
- **5 баллов.** Математическое ядро решения практически получено и предпринята содержательная попытка доказать ключевую лемму, но в доказательстве имеется локальный исправимый дефект (например, неверно сформулированное подобие или ошибка в одном угловом соотношении); либо найдено по существу всё решение, но оформление существенно неполно.
- **4 балла.** Ключевое соотношение $d_1 d_2 = 144$ (или сразу $x(x + 7) = 144$) использовано как готовый факт без геометрического доказательства; последующая алгебра и ответ верны.
- **2 балла.** Есть существенное правильное геометрическое продвижение (перпендикуляры, подход к подобию, корректные промежуточные соотношения), но ключевая формула $d_1 d_2 = 144$ не получена и решение не завершено.
- **1 балл.** Только правильный численный ответ 25 (или числа 9 и 16) без достаточного обоснования; также сюда относятся решения, где правильный ответ получен из некорректной геометрической идентификации.

• **0 баллов.** Существенно неверная геометрия с неверным ответом, только рисунок без продвижения, нерелевантный материал или решение другой задачи.

3. Существуют ли вещественные числа a, b, c , такие что при любом вещественном t уравнение $x^3 + (a + t)x^2 + (b + t)x + (c - t)$ имело бы три вещественных корня?

(С. А. Лучинин, К. А. Кноп)

Ответ: Да.

Решение. Попробуем подобрать коэффициенты так, чтобы многочлен раскладывался на два множителя, каждый из которых имеет вещественные корни:

$$(x + t)(x^2 + x - 1).$$

Раскрывая скобки, получаем $(x + t)(x^2 + x - 1) = x^3 + (t + 1)x^2 + (t - 1)x - t$. Это в точности многочлен $x^3 + (a + t)x^2 + (b + t)x + (c - t)$ при $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$.

Первый множитель имеет вещественный корень $x = -t$, а квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ имеет два вещественных корня. Таким образом, подходящие числа существуют; например,

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0.$$

Критерии.

• **7 баллов.** Полное решение: найдена корректная тройка коэффициентов, получено разложение (например, через множитель $x^2 + x - 1$), и строго проверено требование для всех t , включая возможное совпадение линейного корня с одним из корней квадратного множителя.

• **6 баллов.** Корректная конструкция и доказательство по существу получены, но не разобран только возможный случай совпадения найденных вещественных корней. Это был основной массовый уровень почти полного решения.

• **3 балла.** Приведена корректная тройка коэффициентов, но отсутствует достаточная проверка того, что она работает при всех t .

• **0 баллов.** Есть содержательные правильные преобразования (по Виету, дискриминанту, выделению $t(x^2 + x - 1)$, подбору факторизации и т.п.), но корректная универсальная конструкция и доказательство не получены.

• **также 0 баллов.** Неверное доказательство невозможности, потеря третьего корня в асимптотическом рассуждении, ошибочная факторизация или иная попытка без корректного содержательного результата.

4. На турнир по волейболу приехало 50 команд. Каждые две команды должны сыграть между собой не более одного раза. Ничьих в волейболе нет. По правилам турнира команда, в пятый раз проигравшая, выбывает. Команда, сыгравшая в этом турнире хотя бы 20 матчей, награждается медалью. Найдите наибольшее количество команд, награждённых такими медалями (они могут выбыть из турнира).

(А. А. Солынин)

Ответ: 16.

Решение. Оценка. Пусть медали получили m команд. Каждая такая команда сыграла не менее 20 матчей и проиграла не более 5, поэтому одержала не менее 15 побед. Всего команды-медалисты одержали не менее $15m$ побед. Часть этих побед была одержана в матчах между самими медалистами. Каждый такой матч является одновременно поражением одной из команд-медалистов. Поскольку каждая из них проиграла не более 5 раз, таких матчей было не более $5m$. Значит, в матчах против остальных $50 - m$ команд медалисты одержали не менее $15m - 5m = 10m$ побед. Но каждая команда, не получившая медаль, могла проиграть не более 5 раз: после пятого поражения она выбывает. Поэтому $10m \leq 5(50 - m)$. Отсюда $m \leq 16$.

Пример. Покажем, как 16 команд действительно могут получить медали. Обозначим их через

$$S, T_0, T_1, \dots, T_{14},$$

а остальные 34 команды — через

$$B_0, B_1, \dots, B_{33}.$$

Сначала команды B_0, B_1, B_2, B_3 выигрывают у S , а затем S выигрывает у B_{33} . Далее для каждого $k = 0, 1, \dots, 164$ проводится матч, в котором

$$T_{k \bmod 15} \text{ выигрывает у } B_{k \bmod 33}.$$

Все эти 165 пар различны, поскольку $\text{lcm}(15, 33) = 165$. Поэтому каждая команда T_i выигрывает здесь ровно 11 матчей, а каждая из команд $B_0, \dots, B_{32}$ проигрывает ровно 5 раз. Теперь среди команд

$T_0, \dots, T_{14}$ проводим матчи так: для каждого i команда T_i выигрывает у $T_{i+1}, T_{i+2}, T_{i+3}, T_{i+4}$, где индексы считаются по модулю 15. Таким образом, каждая T_i одерживает 4 победы и терпит 4 поражения. Наконец, команда S выигрывает у всех пятнадцати команд T_i . Для каждой T_i это становится пятым и последним поражением. Итак, каждая команда T_i сыграла $11 + 8 + 1 = 20$ матчей и потерпела ровно 5 поражений, а команда S сыграла $4 + 1 + 15 = 20$ матчей и потерпела лишь 4 поражения. Следовательно, медали могут получить 16 команд.

Критерии.

- **7 баллов.** Полное решение: доказана верхняя оценка $m \leq 16$ и дана корректная, реализуемая конструкция (расписание) на 16, без повторных пар и с соблюдением правила выбывания после пятого поражения.
- **6 баллов.** Верхняя оценка корректна и конструкция по существу правильной формы, но остаётся локальный технический пробел в доказательстве реализуемости расписания: например, внешние матчи заданы только требуемыми степенями/суммарными числами без явного распределения пар или доказательства существования соответствующего простого двудольного графа; либо имеется локально исправимая ошибка в порядке последних матчей.
- **5 баллов.** Корректно доказана верхняя оценка $m \leq 16$, но достижимость 16 не доказана: конструкции нет, она только заявлена или предложенный пример существенно некорректен.
- **4 балла.** Существенная половина решения выполнена правильно, но другая часть имеет серьёзный дефект: например, верхняя оценка 16 доказана, но затем сделан неверный вывод о максимуме/достижимости; либо есть сильная конструктивная часть, но доказательство максимальной достижимости существенно неполно.
- **3 балла.** Содержательная попытка оценки или конструкции, дающая заметное продвижение, но центральный пробел остаётся; возможна подробная конструкция на меньшее число медалистов без доказательства максимальной достижимости.
- **2 балла.** Есть ключевая идея подсчёта, но существенная системная ошибка (например, разрешается только 4 поражения вместо 5, требуется 20 побед вместо 15, неверно учитываются внутренние матчи и т.п.) не позволяет получить правильную оценку.
- **1 балл.** Отдельное содержательное наблюдение, не дающее корректной верхней оценки или конструкции.
- **0 баллов.** Нет содержательного корректного продвижения.

5. На координатной плоскости отмечено несколько точек с целыми координатами. Оказалось, что все расстояния между ними иррациональны. Обязательно ли можно добавить ещё одну точку с целыми координатами так, чтобы все расстояния между отмеченными точками по-прежнему были иррациональными?

(А. А. Солюмин)

Ответ: Да.

Решение. Пусть отмечены точки

$$A_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Выберем целое число c , отличное от всех y_i , и будем искать новую точку в виде $P = (N, c)$, где N — достаточно большое целое число. Для каждой точки A_i положим $d_i = |c - y_i| > 0$, $s_i = |N - x_i|$. Тогда $PA_i^2 = s_i^2 + d_i^2$.

Выберем N настолько большим, чтобы для всех i выполнялось $d_i^2 < 2s_i + 1$. Тогда

$$s_i^2 < s_i^2 + d_i^2 < (s_i + 1)^2.$$

Значит, PA_i^2 не является квадратом целого числа.

Но квадрат расстояния между двумя точками с целыми координатами — целое число. Если само расстояние рационально, то оно обязано быть целым. Следовательно, каждое расстояние PA_i иррационально. Все прежние расстояния не изменились, поэтому такую точку всегда можно добавить.

Критерии.

- **7 баллов.** Полное доказательство существования новой точки. Например, фиксируется горизонталь $y = c$, не проходящая через исходные точки, и строго доказывается, что для каждой исходной точки лишь конечное число целых абсцисс даёт целое расстояние; после чего выбирается абсцисса вне конечного объединения запрещённых множеств. Допустимы и другие полностью обоснованные конструкции.

- **5 баллов.** Почти полное решение с локальным исправимым дефектом: правильная конструкция и механизм избегания квадратов найдены, но есть неточность в одном неравенстве, знаке, выборе соседних квадратов, либо не вполне явно сформулирован переход от нескольких точек к произвольному конечному набору.

- **3 балла.** Содержательная правильная идея без ключевого строгого обоснования: например, фиксируется подходящая горизонталь и выписывается уравнение разности квадратов, но конечность плохих абсцисс

только утверждается; либо используется идея редкости полных квадратов/пифагоровых троек без нужной оценки.

- **1 балл.** Существенное локальное наблюдение: например, рациональное расстояние между целочисленными точками должно быть целым, поэтому квадрат расстояния должен быть полным квадратом. Однако способ одновременного выбора новой точки отсутствует или дальнейший аргумент неверен.

- **0 баллов.** Нет содержательного продвижения, неверное решение или только ответ без математического основания.