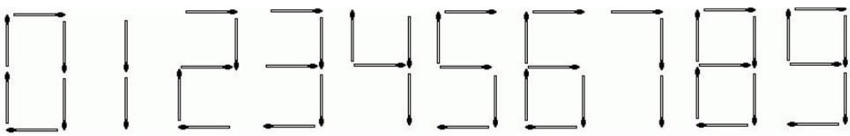
Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
4 класс

Решения

1. Из 21 спички сложено число 888. Как переместить две спички, чтобы в результате получить число, делящееся на 9? Цифры складываются из спичек, как показано на рисунке.



(*К.А. Кноп*)

Решение. Нужно забрать по 1 спичке из двух восьмерок, превращая их в девятки, — и сложить из них цифру 1, которую приписать в начало (или в конец). Получается одно из чисел 1998, 1989, 1899, 9981, 9891, 8991.

Критерии.

• 7 баллов — если приведен любой из годных ответов с объяснением (включая случай с ведущим нулём).

• 0 баллов — числа 288, 828, 882 а также любые примеры, где спички удаляются.

• 0 баллов — если в ответе указан результат деления правильного ответа на 9 (и только) или арифметическое выражение.

• 0 баллов — числа вида 1866 НЕ делятся на 9.

• 0 баллов — всякий бред/отсутствие решения, числа которые нельзя получить в принципе, числа которые даже на 3 не делятся.

2. Котики Черри и Декстер любят придумывать новые математические операции. Однажды они придумали бублик и крестик.

A θ B = 10A+B,

A χ B = A+B+ A θ B.

Черри вычислила, сколько будет 1 θ (2 χ 3), а Декстер — (1 θ 2) χ 3. Чьё число получилось больше и на сколько?

(*В.Н. Галиулина*)

Ответ: 100.

Решение. Первое число:

$2 \chi 3 = 2 + 3 + 2\theta 3 = 5 + 23 = 28$

$1 \theta 28 = 10{+}28 = 38$ Второе число:

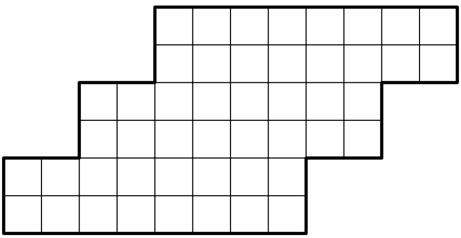
$1 \theta 2 = 10{+}2 = 12$

$12 \chi 3 = 12 + 3 + 123 = 138$ Второе число больше на 138-38=100.

Критерии.

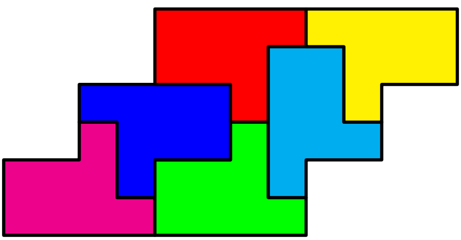
- 7 баллов — полное решение.
- 6 баллов — два числа правильные, расчеты есть, ответа нет.
- 6 баллов — два числа правильные, расчеты есть, разность не посчитана.
- 5 баллов — отсутствуют расчеты, ответ правильный и два числа правильные.
- 4 балла — отсутствуют расчеты и нет ответа, два числа правильные.
- 3 балла — верно посчитано только одно число.
- 1 балл — правильно только одно число, расчетов нету.
- 1 балл — ответ правильный, обоснования нет.

3. Разрежьте данную фигуру по границам клеток на 6 одинаковых восьмиугольников. Восьмиугольники, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.



(*К.А. Кноп*)

Ответ: Это единственное решение с точностью до переворота всей картинки.



Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 5 баллов — если есть фигурка разрезания и нет самого разрезания.
- 0 баллов — нет решения.

4. 4 друга-двоечника тапали хомяка, каждый на своем смартфоне. Каждый из них либо хвастун (преувеличивает количество всех тапов — и своих, и чужих — в 3 раза) либо скромник (про себя преуменьшает в 2 раза, про остальных говорит правду). У каждого спросили, сколько они натапали. Пол ответил: «Мы вместе с Чарли тапнули 22000 раз». Вилли сказал: «Мы вместе с Тедом тапнули 24000 раза». Тед сказал: «А у меня с Чарли вместе 87000 тапов!» Чарли сказал: «На двоих с Вилли у нас 15000 тапов.» Сколько же раз тапнули они все вместе, если известно, что каждый тапнул хотя бы 1 раз?

(*В.Н. Галиулина, Л.Ю. Ярмагаев*)

Ответ: 63000.

Решение. Запишем условие (в тысячах тапов):
п: п + ч = 22
в: в + т = 24
т: т + ч = 87
ч: в + ч = 15
Заметим, что 22 не делится на 3, поэтому первый — скромник. Предположим, что третий тоже скромник. Тогда т/2 + ч = 87. Но тогда, сложив первые два уравнения (даже если второй тоже скромник) мы получим, что т+ч+ еще что-то неотрицательное равно 46, что куда меньше 87. Значит Тед хвастун, а т+ч = 87/3=29.

Перепишем систему (единица измерения 1 тысяча):
п/2 + ч = 22
в: в + т = 24
т + ч = 29
ч: в + ч = 15 Предположим, что Вилли и Чарли скромники.
п/2 + ч = 22
в/2 + т = 24
т + ч = 29
в/2 + ч = 15 Умножим первое и второе уравнение на 2, а затем сложим. Получим
п + в + 2т + 2ч = 92 Вычтем третье и получим
п + в + 2т + 2ч = 63 Этот ответ подходит. Если Вилли хвастун, а Чарли

скромник, тогда
п/2 + ч=22
в + т = 8
т + ч = 29
в + ч/2 = 15 Вычтем из третьего второе, получим ч-в = 21
ч = 21 + в домножим четвертое уравнение на 2, получим 2в + ч = 30, подставим вместо ч предыдущее выражение: 2в+в+21 = 30, в = 3, значит ч = 24. Но тогда п получается отрицательным числом - это невозможно.
Если Вилли скромник, а Чарли хвастун, тогда
п/2 + ч=22
в/2 + т = 24
т + ч = 29
в + ч = 5 Вычтем из третьего четвертое , получим т-в = 24, но т+в/2 равно 24, значит в = 0, а это невозможно по условию.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- +1 балл — если написаны все роли (даже без объяснений), вычисления, и ответ(не суммируется с баллами за роли)
- +1 балл — за каждую нормально объяснённую роль (можно объяснять роли через систему неравенств).
- +0 баллов — если сказано, что Пол, точно скромный, а дальше идёт перебор вариантов, который заканчивается как только найден нужный (без фраз про оставшиеся случаи).
- 0 баллов — решение неверное и ответ не получен.

5. В таблице 3×5 расставлены числа, как показано на рисунке. За одну операцию можно поменять местами любые два числа из клеток, соседних по стороне. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце делилась на 4?

5	27	22	89	14
5	50	4	6	34
13	10	21	18	26

(Л.Ю. Ярмагаев)

Ответ: Нельзя.

Решение 1. Для начала перепишем таблицу, но вместо каждого числа запишем его остаток от деления на 4.

1	3	2	1	2
1	2	0	2	2
1	2	1	2	2

У нас получится одно число 3, один 0, пять единиц и восемь двоек. Будем расставлять числа в таблице по очереди. Сперва посмотрим на столбец, где стоит число 3. В нем так же должны стоять 0 и 1. Затем посмотрим на строку, в которой должна стоять 3.

3	1	2	1	1
1	2	1	2	2
0	2	2	2	2

Единственный вариант как сделать так, чтобы сумма чисел в ней делилась на 4 – добавить к 3 одну двойку и 3 единицы. Заметим, что у нас получилось 3 столбца, где в верхнем ряду стоит 1. Так же осталось 7 двоек и 8 незаполненных мест, значит в каком-то столбце, в котором в верхнем ряду сейчас стоит единица, обязательно будет 2 двойки, а значит сумма будет $1 + 2 + 2$, то есть не будет делиться на 4.

Решение 2. Всего в таблице шесть нечетных чисел, причем они в столбцах должны идти парами, поэтому есть два столбца только из четных чисел. В одном из них нет остатка 0, а значит, три двойки, – противоречие.

Критерии.

• 7 баллов — полное решение.

• 6 баллов — решение правильное, но есть незначительные пропуски или поломан ход рассуждений.

• 6 баллов — решение правильное, но есть незначительные ошибки существенно не влияющие на ход решения.

• 4 балла — если есть идея про остаток от деления на 4 и хорошие продвижения по любому правильному пути (например, написано про 6 нечетных чисел).

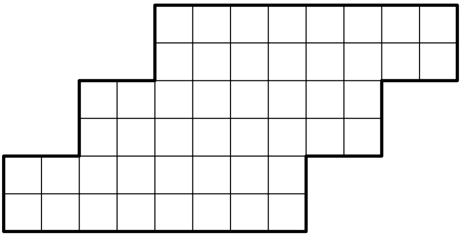
- 3 балла — написано про 6 нечетных чисел, что есть mod 4.
- 3 балла — если явно написано, что можно смотреть на остаток от деления на 4.
- 2 балла — если неявно написано, что можно смотреть на остаток от деления на 4.
- 0 баллов — решение неверное.

Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
5 класс

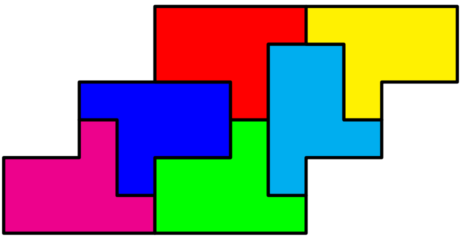
Решения

1. Разрежьте данную фигуру по границам клеток на 6 одинаковых восьмиугольников. Восьмиугольники, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.



(*К.А. Кноп*)

Ответ: Это единственное решение с точностью до переворота всей картинки.



Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 0 баллов — решение неверное.

2. Есть шесть яблок с массами 47, 97, 98, 99, 100 и 103 грамма. Петя и Вася берут по яблоку (сперва Петя) и одновременно начинают есть их. Скорость поедания одинакова: Петя и Вася за одну минуту съедают одинаковое количество граммов яблок. Кто доел своё яблоко, тот берёт одно из оставшихся, если таковые имеются. Может ли Петя съесть больше граммов яблок, чем Вася, если оба будут есть по правилам и Вася не будет поддаваться?

(*А.А.Солынин, И.М.Туманова, К.А. Кноп*)

Ответ: Петя съест больше, если первым ходом возьмет 97.

Решение. Ясно, что выиграет тот, кто возьмет любые три из пяти больших яблок, так как $97+98+99 > (47+97+98+99+100+103)/2$. Докажем, что Петя победит, если первым ходом возьмёт яблоко 97.

Если Вася первым ходом возьмёт 47, то дальше они будут брать яблоки по очереди, начиная с Васи. Поэтому из оставшихся 4 яблок Васе и Пете достанется по 2 яблока. Петя соберёт три из пяти больших яблока и победит.

Если Вася первым ходом возьмёт большое яблоко, то в момент $t = 97$ Петя возьмёт 98 или 99. Если Вася вторым ходом возьмёт одно из оставшихся больших яблок, то следующий ход он будет делать в момент $t \geqslant 98+100 = 198$, а Петя следующий ход будет делать в момент $t \leqslant 97+99 = 196$. Поэтому Петя заберёт третье большое яблоко. Если же Вася вторым ходом возьмёт 47, то своё второе большое яблоко он возьмёт в момент $t \in [98+47 = 145; 103+47 = 150]$ и доест его к моменту $t \in [98+47+100 = 245; 103+47+100 = 250]$. Тоогда Петя в момент $t \leqslant 97+99 = 196$ сможет взять одно оставшееся большое яблоко. Это будет третьим большим яблоком Пети и Петя съест больше.

Заметим, что любое другой первый ход Пети приводит к поражению, так как Вася берёт яблоко 97 и игроки меняются ролями.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- 3 балла — верная стратегия без обоснований.
- 2 балла — сказано, что нужно взять 97 на первом ходу (не как рассмотрение конкретной игры).
- +1 балл — обосновано, что первым ходом не надо брать 47.
- 1 балл — сказано только, что первым ходом не надо брать 47.

3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, представимое в виде суммы четырёх натуральных слагаемых так, что для записи всех слагаемых используется только одна цифра.

(*Б.Ю. Пичугин*)

Ответ: $9952 = 8888 + 888 + 88 + 88$.

Решение. Предположим, что числа суммы записаны цифрой 9. Тогда среди них нет четырёхзначного числа 9999, так как прибавление к нему любого натурального числа делает сумму пятизначной. Значит наибольшая сумма из девяток - это $999 + 999 + 999 + 999 = 3996$.

Если использована цифра 8, то среди слагаемых не более одного четырёхзначного числа, так как $8888 + 8888 = 17776 > 10000$, и не более одного трёхзначного, так как $8888+888+888 = 10664 > 10000$, а $888+888+888 + 888 < 8888$. Поэтому наибольшая сумма будет $8888 + 888 + 88 + 88 = 9952$.

Рассуждая аналогично, получаем, что

- для цифры 7 максимум равен $7777 + 777 + 777 + 77 = 9408$,
- для цифры 6 максимум равен $6666 + 666 + 666 + 666 = 8664$,
- для цифры 5 максимум равен $5555 + 555 + 555 + 555 = 7220$,
- для цифры 4 максимум равен $4444 + 4444 + 444 + 444 = 9776$,
- для цифры 3 максимум равен $3333 + 3333 + 333 + 333 = 7332$,
- для цифры 2 максимум равен $2222 + 2222 + 2222 + 2222 = 8888$,
- для цифры 1 максимум равен $1111 + 1111 + 1111 + 1111 = 4444$.

Критерии.

- 7 баллов — полное решение.
- +3 балла — правильный ответ.
- +2 балла — полный перебор по цифрам.
- +2 балла — адекватно обосновано построение максимального примера хотя бы для одной цифры.
- 0 баллов — решения нет или ответ неверный.

4. В каждой клетке доски 5×5 нарисована стрелочка «вверх», «вниз», «вправо» или «влево». ИИ Вася не видит картинки, но утверждает, что может поменять стрелочки не более чем в 10 клетках так, что после этого можно будет обойти всю доску, начав с какой то клетки и следуя по стрелочкам (посетив каждую клетку по разу). Прав ли ИИ Вася?

(*М.А. Антипов*)

Ответ: ИИ Вася не прав.

Решение. Рассмотрите доску, в которой все стрелки по периметру доски смотрят в край доски. Чтобы обойти такую доску требуется поменять не менее 15 стрелок.

Возможны и другие контрпримеры.

Критерии.

• 7 баллов — полное решение.

• 6 баллов — не сказано, что последнюю стрелку маршрута менять не надо, а в остальном контрпример построен и обоснован.

• 3 балла — верный, но не обоснованный контрпример.

• 0 баллов — решения нет или ответ неверный.

5. В чемпионате по рассказыванию шуток участвовали 15 людей и 15 искинов (искусственных интеллектов), стоявших по кругу в случайном порядке. Каждый из них произнес ровно одну шутку и посмеялся над шутками кого-то из остальных. Известно, что люди смеялись всегда, когда шутку произносил их сосед-человек (и только в этом случае), а искины смеялись над всеми шутками соседей-людей, а также над всеми шутками несоседей. Сколько всего раз смеялись участники чемпионата?

(*К.А. Кноп*)

Ответ: 435.

Решение 1. Заменим каждый (двойной) смех соседей человек-человек на двойной смех соседей искин-искин. Таких пар будет одинаковое количество, так как людей и искинов одинаковое количество. Теперь искины смеются над всеми остальными 29 шутками, а люди не смеются вообще, значит, ответ $15 \cdot 29 = 435$.

Решение 2. Не над соседями смеется только искины, поэтому тут смеялись $И \cdot (И + Л - 3) = 15 \cdot 27$ раз. Теперь посмотрим на круг соседей. Над шуткой человека посмеялись оба соседа, независимо от того, кто это. То есть здесь смеялись $2 * Л = 30$ раз, а над шуткой искина не смеялся никто из соседей. Всего участники смеялись $15 \cdot 27 + 30 = 435$ раз.

Критерии.

• 7 баллов — полное решение.

• 6 баллов — арифметическая или другая незначительная ошибка.

• 4-5 баллов — есть идея про разделение на соседей и не соседей, но есть ошибка или недосказанность в доказательстве одного из случаев; просто упоминание идеи без доказательства не оценивается.

• 1 балл — разобрано несколько частных случаев и во всех этих частных случаях получен правильный ответ.

• 0 баллов — только ответ, или ответ неверный, или нет решения.

Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
6 класс

Решения

1. На острове живет 66 человек, каждый человек принадлежит одному из трех племен: рыцарей, лжецов или масонов. Рыцари всем говорят правду, лжецы всем лгут, а масоны говорят правду только масонам, а всем остальным лгут. Все люди сели за круглый стол и каждый сказал своему левому соседу: «Мой правый сосед не из твоего племени», а правому соседу — «Мой левый сосед не из твоего племени». Могло ли в кругу быть 36 масонов?

(*О.О. Обуховская, С.Е. Розова*)

Ответ: Не могло.

Решение. Пусть два масона стоят рядом. Тогда рассмотрим тройку $MM\_$. Правый сосед должен быть не масоном, т.к. масон масону говорит правду. Но тогда центральный масон говорит правду и правому соседу. Но масон не может говорить правду не масону. Значит масоны не могут стоять рядом, значит их не более половины, т.е. 33.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Доказано, что 2 масона не стоят рядом, но из этого не сделан верный вывод — 5 баллов

• Сформулировано, но не доказано, что 2 масона не стоят рядом — 3 балла

• Если решение неверное — 0 баллов.

2. Расставьте в пустых клетках числа от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце все числа были различными, и числа в соседних (по стороне) клетках отличались более чем на 1.

(*К.А. Кноп*)

1				
	2			
		3		
			4	
				5

Решение.

1	4	2	5	3
4	**2**	5	3	1
2	5	**3**	1	4
5	3	1	**4**	2
3	1	4	2	**5**

Критерии.

- Если приведено правильное решение (пример единственный) — 7 баллов.
- Если пример не верный - 0 баллов.

3. У Маши на полке есть вёдра емкостью 7, 8, 11, 12, 13 литров. Одно из них прохудилось и не держит воду, но какое именно, Маша не знает. Маша хочет взять не более трех вёдер, пойти на речку, набрать там ровно 15 литров воды. Сможет ли она это сделать?

(*А.А.Солынин, И.М. Туманова, К.А. Кноп*)

Ответ: Можно взять ведра 7, 11 ,13 . Возможны и другие варианты

Решение. Если 7 дырявое, то $15 = 13 + (13 - 11)$ Если 13 дырявое, то $15 = 11 + (11 - 7)$ Если 11 дырявое, то **1)** наливаем 7 **2)** переливаем в 13 **3)** наливаем 7 и переливаем в 13, пока оно не заполнится. в 7 остается 1. **4)** выливаем из 13 и переливаем туда 1 **5)** доливаем 7 в 13 и 7 в 7.
Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Разобрана только часть случаев того, какое ведро дырявое (при этом дан верный ответ)— 4 балла.
- Если решение неверное (или приведен только ответ) — 0 баллов.

4. По кругу стоят 2025 цифр от 2 до 9. Известно, что сумма всех этих цифр нечётна, а для любых трех подряд стоящих цифр выполняется правило: «число, составленное из первых двух цифр, делится на третью». Например, в этом кругу не может встретиться последовательность 4, 2, 4 — потому что 42 не делится на 4. А вот последовательность 2, 4, 4 может, так как 24 делится на 4. Обязательно ли все цифры в этом кругу одинаковые?

(*С.Е. Розова*)

Ответ: Обязательно.

Решение. Заметим, что все числа в круге имеют одну и ту же четность (пусть есть нечетное число, после которого идет четное. Тогда двузначное число с нечетной цифрой на конце должно делиться на четное, чего не может быть). При этом сумма нечетная, то есть все числа нечетные. Пусть в круге есть 5. Тогда и предыдущее за ним в круге число равно 5. Действуя так дальше, получаем, что все числа равны 5.

Следовательно, в круге нет пятёрок. Пусть есть семёрка, и пусть предыдущая цифра не 7 (т.е. 3 или 9). Двузначные числа, кратные 7 и оканчивающиеся на 3 или 9, — это 49 или 63. Но первая цифра у них чётная, а мы доказали, что чётных цифр в числе нет.

Аналогично предположим, что написана цифра 9, а предыдущая — не 9 (т.е. 3). Двузначное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на 3, тоже только одно — это 63. Но и в нём есть чётная цифра.

Итак, в круге могли остаться только тройки. Мы пришли к противоречию.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Разобран случай для 3,5,7,9 — по 1 баллу за случай (т.е. если разобраны только 5 и 7, а 3 и 9 не разобраны, то по этому критерию $1+1=2$ балла)
- Доказано, что все числа в кругу - нечетные — 1 балл
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Маша и Витя играют в конструктор. У Маши есть только блоки 1×2, 1×3 и 1×5 (очень много блоков каждого вида), а у Вити только 1×4, 1×5 и 1×7 (тоже очень много блоков каждого вида). Родители дали ребятам задание: каждый должен сложить из своих блоков полоску 1×16, при этом Маша должна использовать на 4 блока больше, чем Витя. Сколькими способами ребята могут выполнить задание? Комментарий: блоки одинакового размера при подсчете вариантов считаются одинаковыми.

(*С.Е. Розова*)

Ответ: 127

Решение. Заметим, что у Вити не много способов сложить свою полоску. $16=4+4+4+4$ (1 способ) и $16=4+5+7$ (всего 6 вариантов). Если у Вити 4 фигурки — у Маши должно быть 8. Это достигается единственным образом $16=8\cdot 2$. Если же у Вити 3 фигурки, то у Маши должно быть 7 фигурок. Это возможно только так: $16=2\cdot 5+3\cdot 2$. Вариантов составления полоски из такого набора всего 21.

Значит, всего вариантов $1\cdot 1+6\cdot 21=127$.

Критерии.

- Полное решение — 7 баллов

- Доказано, что у Маши 21 способ из 7 фигурок — 3 балла
- Доказано, что у Маши 1 способ из 8 фигурок — 1 балл
- Посчитано и доказано число способов у Вити — 2 балла
- Посчитан верный ответ — 2 балла
- Нет решения — 0 баллов

Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
7 класс

Решения

1. В каждой клетке доски 5 на 5 нарисована стрелочка «вверх», «вниз», «вправо» или «влево». ИИ Вася не видит картинки, но гарантирует, что может поменять стрелочки менее, чем в половине клеточек так, что после этого можно будет обойти доску, начав с какой то клетки и следуя по стрелочкам (посетив каждую клетку по разу). Прав ли ИИ Вася?

(*М.А. Антипов*)

Ответ: ИИ Вася не прав.

Решение. Пусть во всех 16 граничных клеточках стрелки указывают наружу. После исправления такая стрелка может остаться максимум одна (конец предполагаемого пути). Значит, надо исправить не менее 15 клеток.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Верный пример без должного обоснования — 3-5 баллов (в зависимости от сложности обоснования примера).
- Разбиение клеток на 12 пар со стрелками навстречу друг другу — 3 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

2. По кругу стоят 2025 цифр от 2 до 9. Известно, что сумма всех этих цифр нечётна, а для любых трех подряд стоящих цифр выполняется правило: «число, составленное из первых двух цифр, делится на третью». Например, в этом кругу не может встретиться последовательность 4, 2, 4 — потому что 42 не делится на 4. А вот последовательность 2, 4, 4 может, так как 24 делится на 4. Обязательно ли все цифры в этом кругу одинаковые?

(*С.Е.Розова*)

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что все числа в круге имеют одну и ту же четность. При этом сумма нечетная, то есть все числа нечетные. Пусть в круге есть 5. Тогда и предыдущее за ним в круге число равно 5. Действуя так дальше, получаем, что все числа равны 5.

Следовательно, в круге нет пятёрок. Пусть есть семёрка, и пусть предыдущая цифра не 7 (т.е. 3 или 9). Двузначные числа, кратные 7 и оканчивающиеся на 3 или 9, — это 49 или 63. Но первая цифра у них чётная, а мы доказали, что чётных цифр в числе нет.

Аналогично предположим, что написана цифра 9, а предыдущая — не 9 (т.е. 3). Двузначное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на 3, тоже только одно — это 63. Но и в нём есть чётная цифра.

Итак, в круге могли остаться только тройки. Мы пришли к противоречию.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Доказано, что все числа нечётны — 2 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не равны, и каждая из них меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что один из числителей можно увеличить на 1 так, чтобы сумма получившихся дробей была меньше 1.

(К.А. Кноп)

Решение. Пусть $S_1 = \frac{a}{b} + \frac{c+1}{d}$, а $S_2 = \frac{a+1}{b} + \frac{c}{d}$. Так как $S_1 + S_2 \leqslant \frac{a}{b} + \frac{d-c}{d} + \frac{b-a}{b} + \frac{c}{d} = 2$, то меньшая из величин S_1 и S_2 не больше 1. Но так как дроби различны, то $S_1 \neq S_2$, поэтому обе они не могут быть равны 1, а значит, меньшая — строго меньше 1.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. У рыцаря есть сундуки с бриллиантами. Каждую ночь рыцарь берет один из сундуков, в котором больше двух бриллиантов, и раскладывает бриллианты из него в два пустых сундука примерно поровну: количества бриллиантов в двух новых сундуках должны отличаться, но не более чем на 2. Сколько ночей будет продолжаться эта забава, если изначально у него был один сундук с 2025^{2025} бриллиантами? (Пустых сундуков очень много, заведомо хватит для потребностей рыцаря.)

(М.А.Антипов)

Ответ: $1350 \cdot 2025^{2024} - 1$.

Решение. Так как 2025 кратно 3, можно обозначить $2025^{2025} = 3k$, где k – натуральное число. Будем следить за количествами бриллиантов в образующихся сундуках, а точнее, за их остатками от деления на 3. Изначально есть один сундук с остатком 0, будем называть такой сундук 0-сундуком. Аналогично определим 1-сундук и 2-сундук.

Далее, ясно, что при делении на две части 0-сундук превращается в 1-сундук и 2-сундук (теоретически, он мог бы превратиться также и в два 0-сундука, но тогда количества бриллиантов в них совпадали бы или отличались минимум на 3, что противоречит условию). Аналогично, 1-сундук всегда делится на 1-сундук и 0-сундук, а 2-сундук — на 2-сундук и 0-сундук.

Отсюда видно, что разность между количествами 2-сундуков и 1-сундуков не меняется при указанных операциях. Изначально не было ни тех, ни других, значит в конце — когда нельзя больше сделать ни одного деления – 1-сундуков и 2-сундуков поровну. В этом случае эти сундуки представляют из себя просто сундуки с одним бриллиантом и сундуки с двумя бриллиантами (а других сундуков нет). Итак, в финале исходные 3k бриллиантов распределились по одинаковому количеству 1-бриллиантовых и 2-бриллиантовых сундуков, значит и тех и других по k штук, всего $2k$. То есть, забава продолжалась $2k - 1$ ночь.

Решение 2. Решим задачу для общего случая: пусть изначально. был сундук с N бриллиантами.Для маленьких значений N несложно увидеть закономерность в количестве ночей: для N, кратных трем, то есть чисел вида $N = 3k$ ответ $2k - 1$, для чисел вида $N = 3k + 1$ и $N = 3k + 2$ ответ $2k$. Например, при N=1 или 2 ($k = 0$) ответ $2 \cdot 0 = 0$ (действительно, в этом случае рыцарь не может сделать ни одного хода), а при $N = 3$ (здесь $k = 1$) ответ $2 \cdot 1 - 1 = 1$ (в этом случае рыцарь делит свою кучу на 2 бриллианта и 1 бриллиант, на чем все и заканчивается).

Проверим, что если указанная закономерность выполняется для всех чисел N, меньших некоторого числа M, то она будет выполняться и при $N = M$. Отсюда будет следовать, что она ни в какой момент не нарушится (и в частности, та же формула будет работать при $N = 2025^{2025}$).

Считаем, что $M > 3$. Пусть например $M = 6k$. Тогда после первой ночи появятся кучи размером в $3k + 1$ и $3k - 1$ бриллиант. Поскольку для этих количеств закономерность выполняется, чтобы "уничтожить"каждую из них, потребуется $2k$ и $2k - 2$ ночей соответственно. Суммарно получается $1 + 2k + (2k - 2) = 4k - 1$ ночь, что вновь соответствует нашей формуле (так как $M = 3 \cdot 2k$, а $4k - 1 = 2 \cdot 2k - 1$).

Аналогично разбираются остальные случаи

Для $M = 6k+1$ имеем $1 + 2k + (2k-1) = 4k = 2 \cdot 2k$ ходов.

Для $M = 6k+2$ имеем $1 + 2k + (2k-1) = 4k = 2 \cdot 2k$ ходов.

Для $M = 6k+3$ имеем $1 + 2k + 2k = 4k + 1 = 2 \cdot 2k + 1 - 1$ ходов.

Для $M = 6k+4$ имеем $1 + (2k+1) + 2k = 4k + 2 = 2 \cdot 2k + 1$ ходов.

Для $M = 6k+5$ имеем $1 + (2k+1) + 2k = 4k + 2 = 2 \cdot 2k + 1$ ходов.

Итак, наши формулы работают для любого исходного количества брилиантов. Поскольку 2025 делится на 3, надо воспользоваться первой из формул (для $N = 3k$ ответ $2k$), так что ответ получается умножением исходного количества на $\frac{2}{3}$

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Есть восемь монет, по две монеты каждого из четырех видов. Загадочный полупроводниковый прибор умеет проверять, одинакового ли вида две выбранные монеты или нет. За какое наименьшее число использований прибора можно гарантированно добиться от него положительного ответа?

(М.А. Антипов)

Ответ: 7.

Решение. Пример: сравниваем одну монету со всеми.

Оценка. Рассмотрим восьмиугольник со всеми диагоналями. Рассмотрим его стороны; покрасим стороны «через одну» в красный цвет, а остальные стороны — в синий. Рассмотрим теперь восемь малых диагоналей (идущих из вершины в вершину через одну). Четыре такие диагонали, не имеющие общих концов, покрасим в жёлтый цвет, а четыре остальные — в зелёный. Аналогично рассмотрим средние диагонали (каждая из них пропускает две вершины) и покрасим их «через одну» в оранжевый цвет, а остальные средние — в фиолетовый. Наконец, все диагонали, соединяющие противоположные вершины, покрасим в чёрный цвет. У нас получилось семь непересекающихся паросочетаний. Чтобы гарантированно получить положительный ответ, нужно задать вопрос хотя бы про одно ребро из каждого паросочетания, а значит, вопросов должно быть не менее семи.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Приведён верный алгоритм на 7 действий — 2 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
8 класс

Решения

1. Мальчик бежал с постоянной скоростью вверх по эскалатору, который так же с постоянной скоростью двигался вверх. Через 2 минуты эскалатор выключили, после чего мальчик добежал до конца эскалатора. Оказалось, что мальчик потратил на свой путь на 2 минуты меньше, чем если бы бежал по выключенному эскалатору. Докажите, что скорости мальчика и эскалатора равны.

(*С.А. Лучинин*)

Решение. Пусть скорости мальчика и эскалатора равны x и y метров в минуту соответственно. Заметим, что эскалатор за 2 минуты работы «продвинул» мальчика вверх на $2y$ метров. А если бы мальчик бежал сразу по выключенному эскалатору, то за 2 дополнительные минуты он пробежал бы на $2x$ метров больше. Так как в оба раза он преодолел одинаковое расстояние, то $2x = 2y$, откуда следует решение задачи.

Критерии.

- Приведено полное решение — 7 баллов.
- Разбор частного случая скоростей — 0 баллов.

2. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = CD = DE = EA = 10$, причём $\angle BDC + \angle ADE = \angle ADB$. Докажите, что существует точка F такая, что $AF = BF = DF = 10$.

(*А.А. Солынин*)

Решение. Определим точку F так, что $BCDF$ параллелограмм. Тогда $FB = CD = 10$, $FD = BC = 10$. Осталось показать, что $AF = 10$. Так как $FD \parallel BC$, а треугольник BCD равнобедренный, то $\angle FDB = \angle DBC = \angle BDC$. А по условию $\angle BDC + \angle ADE = \angle ADB$. Значит, $\angle FDA = \angle ADE = DAE$ (последнее равенство следует из равнобедренности треугольника AED). То есть мы получили, что $DF \parallel AE$ и $DF = AE = 10$. Следовательно, $AFDE$ параллелограмм и $AF = DE = 10$.

Критерии.

• Задача не решена или нет существенных продвижений. Часто, используется подход «Пусть такая точка есть. Тогда проверим, что это ничему не противоречит» — 0 баллов

• В решении имеются существенные продвижения, приводящие, при правильном применении к верным утверждениям, способстующим доказательству. Часто, это дополнительные построения и доказательство параллельности сторон пятиугольника или свойства сумм углов, что впоследствии должно приводить к верному утверждению о наличии искомой точки. Чертёж отсутствует или представляется частным случаем — 2 балла

• В целом, идея доказательства верна, но не хватает обоснованности утверждений. Часто, вольная трактовка понятий «симметрия» или обобщение фактов, отсутствие чертежа — 5 баллов

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что дроби $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ не равны, и каждая из них меньше $\dfrac{1}{2}$. Докажите, что один из числителей можно увеличить на 1 так, чтобы сумма получившихся дробей была меньше 1.

(К.А. Кноп)

Решение. Пусть $S_1 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c+1}{d}$, а $S_2 = \dfrac{a+1}{b} + \dfrac{c}{d}$. Предположим, что $b = d$. Тогда если $a < c$, то $S_1 \leqslant 2 \cdot \dfrac{c}{d} < 1$. Аналогично, если $a > c$. Далее мы будем считать, что $b \neq d$, откуда следует, что $S_1 \neq S_2$.

Так как $b \geqslant 2a + 1$, то $\dfrac{a+1}{b} \leqslant \dfrac{b-a}{b}$. Аналогично $\dfrac{c+1}{d} \leqslant \dfrac{d-c}{d}$. Следовательно, $S_1 + S_2 \leqslant \dfrac{a}{b} + \dfrac{d-c}{d} + \dfrac{b-a}{b} + \dfrac{c}{d} = 2$. А так как $S_1 \neq S_2$, то одно из чисел S_1 и S_2 строго меньше 1.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Имеются незначительные ошибки в оценке — 5-6 баллов.

• Доказано, что $b = 2a+1$, $d = 2c+1$, но дальнейшее продвижение неверно или отсутствует — 3 балла.

• В решении имеются существенные продвижения — 1-2 балла.

• Разбор частного случая дробей — 0 баллов.

4. Сколько существует способов разбить числа 1, 2, ..., 540 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была не меньше 533?

(С.А.Лучинин)

Ответ: $945 \cdot 9^{265}$.

Решение. Будем разбивать числа на пары по очереди. Для 1 есть 9 способов сопоставить пару (любое число от 532 до 540), для 2 есть также 9 способов сопоставить пару (любое число от 531 до 540, кроме числа в первой паре) и так далее, числу 265 есть 9 способов сопоставить пару (любое число от 268 до 540, кроме чисел в предыдущих парах). Итого мы получили 9^{265} способов составить пары с числами $1, 2, \ldots, 265$. Для каждого такого способа оставшиеся 10 чисел можно разбивать на пары как угодно, так как любые два из них дают в сумме хотя бы 533. Таких способов $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$. Действительно, упорядочим эти 10 чисел и будем разбивать числа на пары, начиная с наименьшего. Самому маленькому числу есть 9 способов сопоставить пару, следующему по старшинству числу не из первой пары — 7 способов, и так далее. Итого получаем $945 \cdot 9^{265}$ способов.

Критерии.

• Задача не решена или нет существенных продвижений. Чаще всего, нет понимания, как формируются пары чисел — 0 баллов

• Доказано существование 266 пар чисел, которые подходят по условию (с 9-ю вариантами выбора пары) и наличие после этого 8 «больших» чисел. Способ подсчёта количества комбинаций неверный — 1 балл.

• Доказано существование 266+4 пар чисел, которые подходят по условию(первые — с 9-ю вариантами выбора пары). Способ подсчёта количества комбинаций для 266 пар верно (9^{266}), но окончательная формула не верна (часто, из-за неверного применения правила произведения для оставшихся 8 чисел) — 2 балла.

• В целом, идея подсчёта количества комбинаций для $266 \cdot 4$ пар верна, правило произведения применено верно, но неверный способ посчитать комбинации для оставшихся 8 чисел) — 5 баллов.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

5. Дано натуральное число n. Серёжа нашёл минимальные натуральные числа x и y такие, что $1+2+\ldots+x$ делится на n, а $1+2+\ldots+y$ делится на $n+1$. Могло ли так оказаться, что $y-x \geqslant 14092025$?

(С.А. Лучинин)

Ответ: Могло.

Решение. Пусть $n+1=2^a$. Так как $1+2+\ldots+y=\dfrac{y(y+1)}{2}$ делится на 2^a, а числа y и $y+1$ разной чётности, то одно из них должно делиться на 2^{a+1}. Следовательно, $y \geqslant 2^{a+1} - 1$ (на самом деле можно убедиться, что равно). Так же заметим, что число $1 + 2 + \ldots + 2^a - 1 = (2^a - 1)2^{a-1}$ делится на $n = 2^a - 1$. А так как x минимальное возможное, то $x = \leqslant 2^a - 1$ (но может быть и меньше). Тогда $y - x \geqslant (2^{a+1} - 1) - (2^a - 1) = 2^a$, что бывает сколь угодно большим при больших a. То есть могло так оказаться, что $y - x \geqslant 14092025$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Приведён верный пример без обоснования результатов проверки (неочевидный с точки зрения применения процедур выбора минимальности x и y) — 5 баллов
- Есть разбор ситуаций, связанных с кратностью сумм для x и для y, приводящий к исследованию больших значений n. Пример не найден или приведён неверный пример — 2 балла.
- Задача не решена или нет существенных продвижений — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
9 класс

Решения

1. Есть ведро, в котором много шариков, и есть 288 стаканов, поставленных в ряд: первый стакан находится на расстоянии 1 м от ведра, а каждый следующий — на расстоянии 1 м от предыдущего (все стаканы и ведро — на одной прямой). Андрей берёт шарик из ведра, идёт у первому стакану, кладёт шарик в стакан, возвращается к ведру, снова берёт шарик, идёт ко второму стакану, кладёт туда шарик, возвращается к ведру, и т.д. Яков берёт из ведра шарик, идёт к последнему стакану, кладёт туда шарик, идёт к ведру, берёт оттуда шарик, идёт к предпоследнему стакану, и т.д. Начинают мальчики одновременно, их скорости постоянны и равны. Могло ли оказаться, что они опустили шарики в какой-то стакан одновременно?

(А.А. Солынин)

Ответ: Могло. Они встретятся у 204-го стакана.

Решение. Решим задачу в общем случае. Пусть всего n стаканов, и они одновременно опустили шарик в k-й стакан. Тогда путь Андрея равен $2+4+\ldots+2(k-1)+k=(k-1)k+k=k^2$. Путь Якова равен $2n+2(n-1)+\ldots+2(k+1)+k=(n+k+1)(n-k)+k=n^2-k^2+n$. Следовательно, $k^2=n^2-k^2+n$, т.е. $k^2=\frac{n(n+1)}{2}$. Итак, задача свелась к вопросу, может ли треугольное число быть точным квадратом. Такое вполне может быть — это числа 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, …, образующие последовательность A001110 в OEIS (сами n образуют последовательность A001108, см. https://oeis.org/A001108). В частности, при $n=288$ получаем $k=204$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Приведён ответ 204 — 1 балл.
- Если решение неверное — 0 баллов.

2. Среди двадцати бандерлогов каждый относится либо к племени рыцарей, всегда говорящих только правду, либо к племени лжецов, которые всегда лгут. Каждый из них сказал некоторым другим бандерлогам фразу, так что в каждой паре A и B была сказана ровно одна фраза (т.е. либо A сказал B одну фразу, либо наоборот). Прозвучало 100 фраз «Мы с тобой одной крови, ты и я» и 90 фраз «Мы с тобой не одной крови, ты и я». Какое наименьшее и какое наибольшее количество бандерлогов-рыцарей могло быть? (Фраза «одной крови» означает «из одного племени».)

(А.А. Солынин)

Ответ: Минимум — 7, максимум — 14.

Решение. Заметим, что рыцарь про рыцаря говорит первую фразу «Мы с тобой одной крови». Следовательно, пар рыцарь-рыцарь не более 100. Значит, рыцарей не может быть более 14, т.к. уже при 15 рыцарях таких пар будет $\frac{15\cdot 14}{2} = 105$. Проделывая аналогичное рассуждение для лжецов (они говорят друг другу, что не одной крови), получаем, что лжецов не может быть более 13 (иначе пар лжец-лжец не менее $\frac{14\cdot 13}{2} = 91$), а значит, рыцарей как минимум 7.

Примеры легко следуют из оценки. Пусть рыцарей семь; тогда они сказали друг другу 21 фразу первого типа. Остальные фразы первого типа они получили от лжецов (этих фраз хватает, т.к. $13 \cdot 7 = 91 > 100 - 21$). Остальные фразы сказаны рыцарями лжецам или же лжецами между собой. Пример с 14 рыцарями строится аналогично.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Приведены только оба ответа — 1 балл.
- Приведены оба ответа с примерами — 2 балла.
- Только оценка без примеров — 5 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

3. Андрей задумал квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 - px + q$, имеющий два корня. Если один корень увеличить на 2, а второй умножить на 2, то получатся корни трёхчлена $g(x) = x^2 - qx + p$. Найдите $f(\frac{5}{6})$.

(А.А. Солынин)

Ответ: $73/36$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни f. Тогда из теоремы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 x_2 = q \\ x_1 + 2 + 2x_2 = q \\ (x_1 + 2) \cdot 2x_2 = p. \end{cases}$$

Подставив $x_1 + x_2 = p$ в третье уравнение, получим $p + 2 + x_2 = q$, откуда $x_2 = q - p - 2$.

Аналогичную подстановку проделаем с четвёртым уравнением: $2q + 4x_2 = p$. Подставив $x_2 = q - p - 2$, получим $6q = 5p + 8$, т.е. $(\frac{5}{6})^2 - \frac{5}{6}p + q = \frac{73}{36}$, что и требовалось.

Замечание. Можно показать, что такой трёхчлен существует. Например, $p = \frac{-31 \pm 3\sqrt{57}}{7}$, $q = \frac{-33 \pm 5\sqrt{57}}{14}$. Корни равны $\frac{-9 \pm \sqrt{57}}{2}$ и $\frac{1 \mp \sqrt{57}}{14}$.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Верно записанные четыре теоремы Виета — 1 балл.

• Ответ с корнями, который упрощается до верного, но не сосчитан до конца — 5 баллов

• Получено соотношение $\frac{p}{q}$ — 3 балла

• Найдены корни в явном виде, но подставлена только одна пара — 3 балла

• Если решение неверное — 0 баллов.

4. Положительные дроби $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$ попарно различны, и каждая из них меньше $1/3$. Костя хочет прибавить к k числителям по 1 так, чтобы сумма полученных дробей всё ещё была меньше 1. При каком максимальном k Костя заведомо сможет это сделать?

(*К.А. Кноп, А.А. Солынин*)

Ответ: $k = 1$.

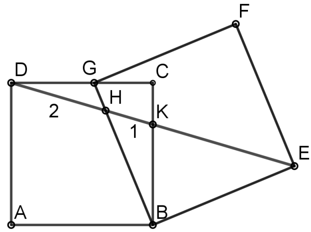
Решение. Покажем, что можно прибавить 1 к числителю одной из дробей. Не умаляя общности, будем считать, что $b_1 > b_2 > b_3$ (если у двух дробей равные знаменатели, то у них разные числители, а тогда к меньшему из числителей можно добавить единицу). Будем, конечно, добавлять единицу к a_1 (добавлять единицу целесообразно к дроби с наибольшим знаменателем). Заметим, что если $\frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{3}$, то $\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3b_1}$ (любые различные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ отличаются не менее чем на $\frac{1}{bd}$). Тогда $\frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} \leqslant 1 - \frac{1}{3b_1} - \frac{1}{3b_2} - \frac{1}{3b_3} + \frac{1}{b_1} < 1$, т.к. b_1 является наибольшим из знаменателей.

Покажем, что к двум дробям прибавить что-либо уже может не получиться. Например, если дроби — $1/5$, $2/7$ и $1/4$. Если прибавим по 1 к числителям двух дробей с наибольшими знаменателями, то получим сумму $2/5+3/7+1/4>1$. Если брать дроби с меньшими знаменателями, то сумма увеличится еще сильнее.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Показано, что $k < 3$ — 1 балл
- Показано, что $k < 2$ — 2 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Два квадрата пересекаются так, как показано на рисунке. Известно, что $DH = 2$, $HK = 1$. Найдите угол CGF.



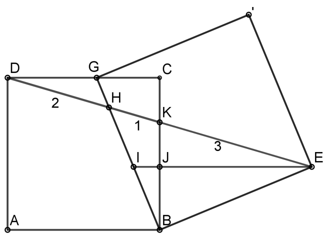
(*К.А. Кноп*)

Ответ: $22,5°$.

Решение 1.

По условию $DH = 2$, $HK = 1$. Так как треугольники BCG и BEJ равны, то $KE = KD = 3$, $EH = 4$, поэтому из подобия DGH и EIH следует, что $EI = 2DG$.

Обозначим $DG = x$, $GC = y$, тогда $EI = 2x$, $IJ = 2x-(x+y) = x-y$; $IJ/JB = GC/CB$, то есть $(x-y)/y = y/(x+y)$. Отсюда $x^2-y^2 = y^2$, то есть $x/y = \sqrt{2}$, иначе говоря $DG/GC = DB/BC$, а это значит, что BG — биссектриса угла CBD. Следовательно, неизвестный угол равен половине от $45°$.



Решение 2. Построим отрезок DT, равный и параллельный FG. Нетрудно посчитать, что $KT = KB$, а тогда DK — медиана в треугольнике DTB. Тогда H — точка пересечения медиан этого треугольника. Но $BH \perp DT$, то есть BH и биссектриса угла DBC. Следовательно, неизвестный угол равен половине от $45°$.

Решение 3. Сосчитаем в координатах. Будем считать квадрат $ABCD$ единичным (тогда, конечно, отрезки DH и HK будут иметь другие длины, но их соотношение останется прежним). Пусть $A(-1,0)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$, $D(-1,1)$, $G(-x_0,1)$. Тогда точка E будет иметь координаты $(1,x_0)$. Тогда прямая DE будет иметь уравнение $\frac{x-1}{2} = \frac{y-x_0}{x_0-1}$. Точка K — пересечение прямых DE и OY, её координаты — $(0, \frac{1+x_0}{2})$. Тогда координаты точки H (разбивающей отрезок DK на части в соотношении 2:1) — $(-\frac{1}{3}, \frac{2+x_0}{3})$. Прямая BG имеет уравнение $y = -\frac{x}{x_0}$, и точка H лежит на этой прямой. Отсюда имеем $\frac{2+x_0}{3} = \frac{1}{3x_0}$, т.е. $2x_0 + x_0^2 = 1$. Но это равносильно равенству $\frac{2x_0}{1-x_0^2} = 1$. Осталось заметить, что x_0 — это тангенс искомого угла CGF, а последнее тождество означает, что тангенс $2\angle CGF$ равен 1. Это и значит, что $\angle CGF = 22,5^\circ$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы

1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
10 класс

ЮМШ ЮМШ

Решения

1. Вова нарисовал прямоугольник и прямоугольный треугольник. Могло ли оказаться, что у них одинаковые периметры и одинаковые площади?

(*В.Е. Зверев*)

Ответ: Могло.

Решение. Например, подойдёт треугольник с катетами 3 и 4 (это египетский треугольник, его гипотенуза равна 5) и прямоугольник со сторонами $3 + \sqrt{3}$ и $3 - \sqrt{3}$. У каждой из фигур периметр равен 12, а площадь — 6.

Решение 2. Можно фиксировать площадь треугольника и двигать вершинку параллельно основанию (треугольник не перестаёт быть прямоугольным). Понятно, что так можно получить сколь угодно большой периметр. Аналогично можно нарисовать квадрат с той же площадью, а затем увеличивать одну сторону и уменьшать вторую, сохраняя площадь. Периметр также можно сделать сколь угодно большой периметр (если одна сторона равна X, то вторая будет $\frac{S}{X}$, а периметр будет более $2X$, а X любое). Значит, и треугольник, и прямоугольник можно довести до фиксированного периметра.

Критерии.

- Корректный пример с объяснением, как он строится — 7 баллов.
- Неверный пример — 0 баллов.

2. Среди двадцати бандерлогов каждый относится либо к племени рыцарей, всегда говорящих только правду, либо к племени лжецов, которые всегда лгут. Каждый из них сказал некоторым другим бандерлогам фразу, так что в каждой паре A и B была сказана ровно одна фраза (т.е. либо A сказал B одну фразу, либо наоборот). Прозвучало 100 фраз «Мы с тобой одной крови, ты и я» и 90 фраз «Мы с тобой не одной крови, ты и я». Какое наименьшее и какое наибольшее количество бандерлогов-рыцарей могло быть? (Фраза «одной крови» означает «из одного племени».)

(*А.А. Солынин*)

Ответ: Минимум — 7, максимум — 14.

Решение. Первую фразу мог произнести кто угодно по отношению к рыцарю, а вторую фразу — кто угодно по отношению к лжецу. Так как про каждого было сказано максимум 19 фраз, то как минимум 6 бандерлогов-рыцарей должно быть (иначе фраз первого типа будет не более 95). Но оценка 6 не достигается: в этом случае получается максимум $14 \cdot 6 = 84$ фраз первого типа, сказанных лжецами рыцарям, и ещё 15 фраз (тоже первого типа), сказанные рыцарями рыцарям — итого максимум 84+15=99 фраз первого типа. Поэтому минимальное количество бандерлогов-рыцарей — 7.

Аналогично должно быть не менее 5 бандерлогов-лжецов. Точно так же доказывается, что не может быть ровно 5 лжецов (рыцари им могли сказать максимум 75 фраз второго типа, а они друг другу — 10, что в сумме меньше 90). Итак, бандерлогов-рыцарей не более 14.

Примеры легко следуют из оценки. Пусть рыцарей семь; тогда они сказали друг другу 21 фразу первого типа. Остальные фразы первого типа они получили от лжецов (этих фраз хватает, т.к. $13 \cdot 7 = 91 > 100 - 21$). Остальные фразы сказаны рыцарями лжецам или же лжецами между собой. Пример с 14 рыцарями строится аналогично.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Не проверено, что значения достигается, и это не следует из остальных размышлений — 5 баллов.
- Только ответ — 0 баллов
- Если решение неверное — 0 баллов.

3. Пусть $n > 4$ — основание системы счисления, и пусть k, l, m — последние (т.е. наибольшие) цифры в этой системе счисления. Докажите, что $\overline{123\ldots km} \cdot l = \overline{mlk\ldots 432}$. Например, в десятичной системе счисления это равенство выглядит как $12345679 \cdot 8 = 98765432$.

(А.А. Солынин)

Решение. Вместо цифр m, l, k будем использовать $n-1$, $n-2$ и $n-3$.

Нам нужно доказать равенство $\overline{123\ldots kl} + l = \overline{mlk\ldots 32}$. Распишем эти числа как сумму степеней числа n:

$$(n-2)((n-2)+(n-3)\cdot n+\ldots+(n-(n-2))\cdot n^{n-4}+(n-(n-1))\cdot n^{n-3}+(n-2) =$$

$$= 2 + 3n + 4n^2 + \ldots + (n-2)n^{n-4} + (n-1)\cdot n^{n-3}.$$

Преобразуем:

$$(n-2)(1+n+n^2+\ldots+n^{n-2})-(n-2)(2+3n+\ldots+(n-1)n^{n-3})=$$

$$=2+3n+\ldots+(n-1)n^{n-3}.$$

$$(n-2)(1+n+n^2+\ldots+n^{n-2})=(n-1)(2+3n+\ldots+(n-1)n^{n-3}).$$

Заметим, что $1+n+n^2+\ldots+n^{n-2}=\frac{n^{n-1}-1}{n-1}$ (сумма геометрической прогрессии), а $2+3n+4n^2+\ldots+(n-1)n^{n-3}=(n-1)n^{n-2}-\frac{n^{n-2}-1}{n-1}-1$ (для доказательства этого, например. можно сложить равенства $1+n+n^2+\ldots+n^{n-3}=\frac{n^{n-2}-1}{n-1}$, $1+n+n^2+\ldots+n^{n-3}=\frac{n^{n-2}-1}{n-1}$,, $n+n^2+\ldots+n^{n-3}=\frac{n^{n-2}-n}{n-1}$, $n^2+\ldots+n^{n-3}=\frac{n^{n-2}-n^2}{n-1}$, $\ldots$, $n^{n-3}=\frac{n^{n-2}-n^{n-3}}{n-1}$; при сложении левых частей получим наше выражение, при сложении правых вновь нужно воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии).

Итак, нам осталось доказать

$$(n-2)\frac{n^{n-1}-1}{n-1}=(n-1)n^{n-2}-\frac{n^{n-2}}{n-1}-1.$$

Домножим на знаменатель:

$$(n-2)(n^{n-1}-1)=(n-1)^2n^{n-2}-n^{n-2}+1-(n-1);$$

$$n^n-2n^{n-1}-n+2=n^n-2n^{n-1}+n^{n-2}-n^{n-2}+1-n+1;$$

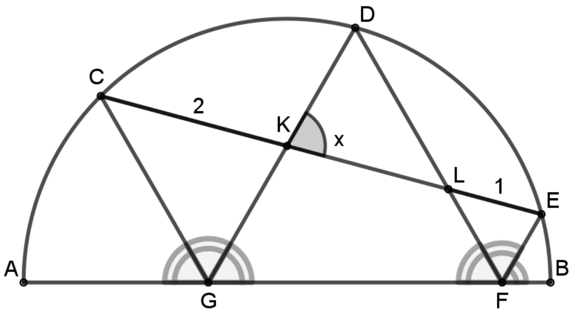
что является тождеством.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Имеются незначительные ошибки в оценке — 5-6 баллов.
- Использование равенства $123\ldots km\cdot m=11\ldots11$ без обоснования — -2 балла.
- Проверка на частных случаях — 0 баллов.

4. На рисунке изображена полуокружность с диаметром AB. Шесть углов с вершинами G и F равны. Известно, что $CK=2$, а $LE=1$. Найдите величину угла DKL.

(*К.А. Кноп*)



Ответ: 75°.

Решение. Пусть C' и D' это точки, симметричные C и D, относительно диаметра. Тогда $60^\circ = \angle CGD$ измеряется полусуммой равных дуг CD и $C'D'$, то есть дуга CD равна 60°. Аналогично дуга DE также равна 60°.

Заметим, что $GK \parallel FE$, а $GC \parallel FL$. Следовательно, треугольники GCK и FLE подобны с коэффициентом 2, откуда $GK = 2EF$. Продлим CE до пересечения с AB, получим точку T. Тогда из $GK = 2EF$ следует, что EF это средняя линия в треугольнике TKG. Следовательно, $FT = FG = FD$. То есть треугольник FDT равнобедренный с углом 120° при вершине. Значит, $\angle FTD = \angle FDT = 30^\circ$. Так как FE это биссектриса в треугольнике FGT, то это и серединный перпендикуляр к отрезку DT, то есть $\angle EDT = \angle ETD$. Первый угол измеряется половиной дуги DS (где S это точка пересечения DT с окружностью), а второй — полуразностью дуг CD и ES. Следовательно, дуга ES равна 30°, а $\angle EDT = \angle ETD = 15^\circ$. А тогда $\angle ETF = 15^\circ$, и $\angle DKL = \angle KGT = \angle ETF = 75^\circ$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Доказательство, что $GDT = 90^\circ$ — 2 балла.
- Только ответ — 0 баллов.

5. Петя называет натуральное число k. Вася слышит, что говорит Петя, и называет число n. После этого ищутся минимальные числа x и y, такие что $1^k + 2^k + \ldots + x^k$ делится на n и $1^k + 2^k + \ldots + y^k$ делится на $n+1$. Петя выигрывает, если $y - x < 14092025$, иначе выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

(*С.А. Лучинин, А.А.Солынин*)

Ответ: Выигрывает Вася.

Решение.

Лемма. Существует многочлен $f(x)$ степени $k+1$, такой что выполнено неравенство $1^k+2^k+\ldots+x^k \geqslant f(x)$ при любом x.

На самом деле $1^k+2^k+\ldots+x^k$ в точности является многочленом степени $k+1$. Этот факт широко известен, но его доказательство не столь элементарно, а нам для решения задачи достаточно частного случая.

Доказательство леммы. В самом деле, $1^k+2^k+\ldots+x^k > ([\frac{x}{2}]+1)^k + ([\frac{x}{2}]+2)^k+\ldots+x^k > (\frac{x}{2}-1)^{k+1}$ (у нас не менее $\frac{x}{2}-1$ слагаемого, каждый из которых не меньше $\frac{x}{2}-1$). Поэтому $f(x)=(\frac{x}{2}-1)^{k+1}$ подойдёт.

Пусть Вася назовёт $n=1^k+2^k+\ldots+x^k$ для некоторого огромного x (чуть позже мы покажем, почему можно выбрать такое x). Очевидно, выбранный x и будет тем числом x, который фигурирует в условии задачи. Но тогда $1^k+2^k+\ldots+x^k < n+1$, а $1^k+2^k+\ldots+x^k+(x+1)^k > n+1$. Поэтому $1^k+2^k+\ldots+y^k$ должно быть не менее $2(n+1)$, а тогда $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+y^k > n$. Пусть $z=y-x$, и мы предположим, что z принимает конечное множество значений от 1 до 14092025. При каждом конкретном z выражение $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(x+z)^k$ является многочленом степени n от x, и поэтому при каждом конкретном z найдётся такой достаточно большой x, что $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(x+z)^k < f(x) < 1^k+2^k+\ldots+x^k$ (здесь мы используем $f(x)$ из леммы и факт, что при больших x многочлен большей степени принимает большие значения, нежели многочлен меньшей степени). Теперь выберем такой x, чтобы при всех z от 1 до 14092025 неравенство $(x+1)^k+(x+2)^k+\ldots+(x+z)^k < 1^k+2^k+\ldots+x^k$ выполнялось — это и будет обещанный огромный x.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Только ответ— 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
14 сентября 2025 года
11 класс

Решения

1. Блогерша Оля очень любит подводить статистику, но не любит думать, откуда берутся те или иные числа. Как-то она подводила статистику по одной олимпиаде. В своём блоге она опубликовала следующее: победителей олимпиады — 2,56%, призёров — 25%, участников (т.е. пришедших на олимпиаду, но не ставших победителями или призёрами) — 71,875%, а ещё 18,08% зарегистрировалось, но не явилось на олимпиаду (все числа даны без какого-либо округления). Читатели возмутились, что сумма приведённых чисел не равна 100. Оказалось, что некоторые числа из первых трёх — это проценты не от количества зарегистрированных участников, а от числа явившихся на олимпиаду. Процент неявок сосчитан от числа зарегистрированных участников; все явившиеся были зарегистрированы. Восстановите, какие проценты победителей, призёров и участников должны быть от числа зарегистрированных участников.

(*А.А. Солынин*)

Ответ: Победителей — 2,56%, призёров — 20,48%, участников — 58,88%.

Решение. Назовём подсчёт процентов правильным, если он вёлся от числа зарегистрированных участников. Все проценты даны либо правильные, либо сосчитаны от 81,92 процентов явившихся. Пусть x процентов сосчитаны от явившихся участников; тогда для правильные проценты будут составлять $x \cdot 0,8192$. Исправим подсчёт: 2,56% победителей превращаются в 2,097152%, 25% — в 20,48%, 71,875% — в 58,88%. Итак, нам нужно сложить три числа: первое — 2,56 либо 2,097152, второе — 25 либо 20,48, третье — 71,875 либо 58,88 — и в сумме получить 81,92. Видно, что это можно сделать единственным образом — сложить 2,56, 20,48 и 58,88.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$ и квадрат $ABCD$. Оказалось, что A лежит на оси OX, C — на OY, а B — на параболе (точка B не совпадает с началом координат). Найдите координаты B.

(*К.А. Кноп*)

Ответ: (1,1) или (-1,1).

Решение. Пусть E и F — проекции B на оси OX и OY соответственно. Треугольники AEB и CFB равны, поэтому $BE = BF$. Получаем, что $OEBF$ является квадратом. Тогда OB — биссектриса координатного угла (первой или второй четверти), а она пересекается с параболой только в точках (1,1) или (-1,1).

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Потеряна одна из точек — 4 балла
- Решение опирается на то, что стороны квадрата параллельны осям — 0 баллов

3. В Северной Лимонии $n > 4$ городов, некоторые города соединены бесплатными дорогами (каждая дорога соединяет два города, каждые два города соединены не более чем одной дорогой). Частная компания «Хватьавтодор» хочет купить и сделать платной $n-1$ дорогу так, чтобы от любого города до любого другого можно было проехать по платным дорогам. Но выяснилось, что при любой такой покупке найдутся два города, между которыми нельзя проехать по бесплатным дорогам. Какое наибольшее количество дорог может быть в Северной Лимонии?

(*А. Коншин*)

Ответ: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

Решение. Пример. Назовём один город Дальним, и пусть он соединён дорогой только со Стольным. А все остальные города пусть попарно соединены дорогами. Очевидно, что такой пример подходит.

Оценка. Докажем по индукции, что если в графе с n вершинами отсутствует не более $n-3$ ребер, то его ребра можно покрасить в два цвета так, что оба цвета дадут связный граф на n вершинах. База очевидна.

Выкинем вершину степени меньше чем $n-1$; эта степень все же будет не меньше двух по условию. К оставшемуся графу можно примерить индукционное предположение, а далее покрасить два ребра из этой вершины в два разных цвета. Следовательно, в этом случае можно купить $n-1$ дорогу так, чтобы частные дороги образовали связный граф, и остальные — тоже, что противоречит условию.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Верный пример — 1 балл.
- В решении используется, что в графе есть мост — не больше 1 балла
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_5, b_1, b_2, \ldots, b_5$ таковы, что все дроби $\frac{a_i}{b_i}$ попарно различны и каждая из них меньше $1/5$. Костя хочет прибавить к k числителям по 1 так, чтобы сумма полученных дробей всё ещё была меньше 1. При каком максимальном k Костя заведомо сможет это сделать?

(К.А. Кноп, А.А. Солынин)

Ответ: при $k = 1$.

Решение. Покажем, что к числителю одной из дробей можно прибавить единицу. Если два знаменателя равны, то у них не равны числители, и к меньшему числителю можно прибавить 1. Тогда все слагаемые по-прежнему не будут превышать $1/5$.

Пусть теперь все знаменатели различны. Не умаляя общности, пусть $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5$. Заметим, что если $\frac{a_i}{b_i} < \frac{1}{5}$, то $\frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{1}{5} - \frac{1}{5b_i}$. Добавим единицу к a_1, тогда

$$\frac{a_1+1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5} \leqslant 1 - \frac{1}{5b_1} - \frac{1}{5b_2} - \frac{1}{5b_3} - \frac{1}{5b_4} - \frac{1}{5b_5} + \frac{5}{5b_1} < 1,$$

так как b_1 является наибольшим из знаменателей.

Рассмотрим теперь дроби $\frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{3}{16}, \frac{4}{21}, \frac{5}{26}$. Если прибавить по единице к двум дробям (конечно, с наибольшими знаменателями), то получим $\frac{1}{6} + \frac{2}{11} + \frac{3}{16} + \frac{5}{21} + \frac{6}{26} = 1 - \frac{1}{5\cdot6} - \frac{1}{5\cdot11} - \frac{1}{5\cdot16} - \frac{1}{5\cdot21} - \frac{1}{5\cdot26} + \frac{1}{21} + \frac{1}{26} > 1$. Проверять последнее неравенство, конечно, проще на калькуляторе.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Только контрпример для $k = 2$ с обоснованием его работоспособности — 3 балла.
- Решение опирается на то, что b_i различны — -1 балл
- Только ответ — 0 баллов.

5. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке R, а прямые AD и BC — в точке S. Докажите, что угол ROS тупой.

(В.Е. Зверев)

Решение.

Лемма 1. $SC \cdot SB + RC \cdot RD = RS^2$.

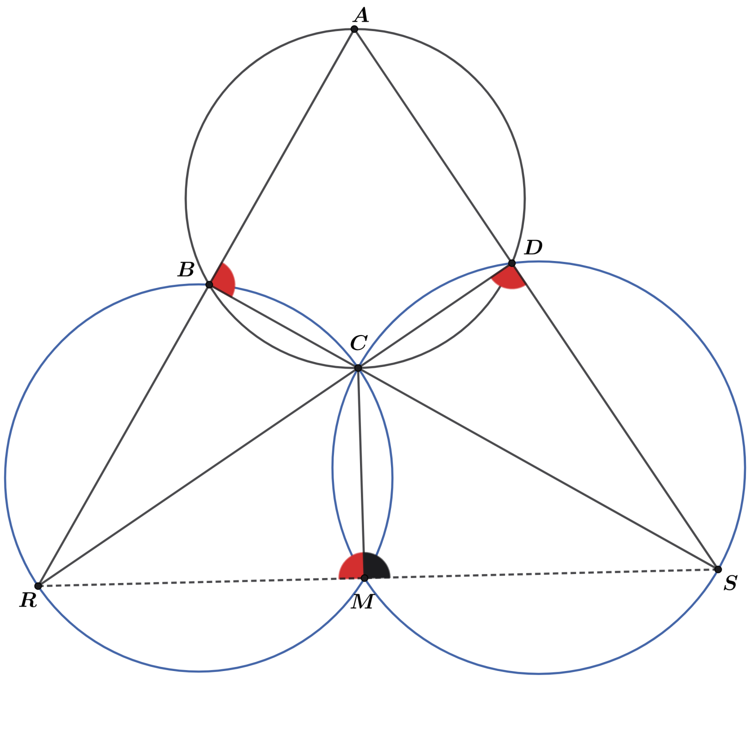
Доказательство. Пусть окружности (BCR) и (SCD) второй раз пересекаются в точке M. Заметим, что в силу вписанностей, верна цепочка равенств:

$$\angle CMR = \angle CBA = \angle CDS = 180^\circ - \angle CMS.$$

Следовательно, точки R, M, S лежат на одной прямой. Тогда $SC \cdot SB = SM \cdot SR$ и $RC \cdot RD = RM \cdot RS$, поэтому

$$SC \cdot SB + RC \cdot RD = SM \cdot SR + RM \cdot RS = RS \cdot (SM + RM) = RS^2,$$

что и требовалось. □



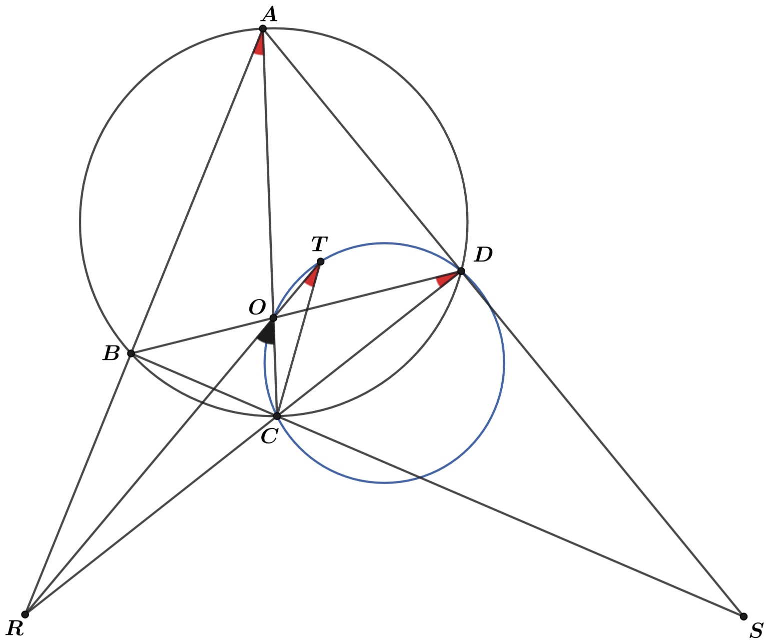
Вернемся к доказательству. Пересечем RO и окружность (OCD) второй раз в точке T. Тогда $\angle RTC = \angle RDO = \angle RAO < \angle ROC$. Откуда T не лежит на отрезке RO, а значит,

$$RO^2 < RO \cdot RT = RC \cdot RD.$$

Аналогично $SC \cdot SB > SO^2$. Следовательно,

$$SC \cdot SB + RC \cdot RD > RO^2 + SO^2.$$

По **лемме 1** левая часть равна RS^2, поэтому угол ROS тупой, что и требовалось.



Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.