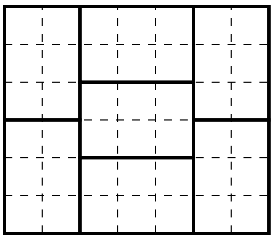
Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
4 класс

Решения

1. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×7 на семь одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника.

Решение. Решение приведено на рисунке.



Критерии.

(а) Если приведено любое верное решение — 7 баллов.

(б) Если решение неверное — 0 баллов.

2. Буратино выписал носом на песке 5 последовательных натуральных чисел. Могло ли среди цифр в этих числах оказаться ровно четыре единицы и три нуля? (Последовательные числа — это числа, каждое из которых больше предыдущего на 1, например: 323, 324, 325, 326, 327.)

Ответ: Да, могло.

Решение. Есть много примеров разного типа, например: 197, 198, 199, 200, 201; или: 1996, 1997, 1998, 1999, 2000; или: 708, 709, 710, 711, 712.

Критерии.
(а) Если приведено любое верное решение — 7 баллов.
(б) Если решение неверное — 0 баллов.

3. На острове по кругу расположены 22 поселения туземцев, а в центре круга находится хижина вождя. Однажды какие-то 9 поселений на острове захватили варвары. После этого из каждого поселения к вождю было послано по одному гонцу. Все гонцы сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что все туземцы правдивы, а варвары всегда врут. Если поселение захвачено, то гонец оттуда — точно варвар, а если нет, то гонец может быть как варваром, так и туземцем. Верно ли, что есть захваченное поселение, у которого оба соседа не захвачены?

Ответ: Да, верно.

Решение. Если бы существовали три захваченных поселения подряд, то варвар из среднего поселения, сказавший что оба соседних захвачены, сказал бы правду, что невозможно. Значит, рядом с каждым захваченным поселением либо одно, либо ни одного захваченного. Если всегда выполняется первый из этих случаев, то все захваченные поселения разбиваются на пары соседних. Но тогда захвачено четное количество, а по условию их 9. Значит, есть захваченное поселение, у которого нет захваченных соседей.

Критерии. Баллы за второй и третий критерий суммируются
(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
(б) Доказано, что три захваченных города подряд быть не может — 5 баллов.
(в) Сказано, что 9 - нечетное число, значит будет захваченное селение с двумя незахваченными соседями — 2 балла
(г) Если решение неверное — 0 баллов.

4. У Кати есть бочки массой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 кг (по одной бочке каждой массы). В бочке массой 2 кг находится 18 кг пшена, а остальные пустые. Еще у Кати есть чашечные весы без гирь. Как Кате разделить пшено на три равные части? Высыпать за пределы бочек пшено нельзя.

Решение. Например, алгоритм может быть такой:
(а) Пересыпаем из 2 в 6 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 11 кг, а в 6ке 7 кг
(б) Пересыпаем Из 6 в 1 до равенства на весах. Тогда в 6ке оказывается 1кг, а в 1ке 6кг.
(в) Пересыпаем Из 2 в 3 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 6 кг, а в 3ке 5кг.
(г) Пересыпаем из 6ки в 3ку. В итоге в 1,2 и 3 оказывается по 6 кг, то есть мы смогли разделить на 3 равные части

Критерии.
(а) Если приведен любой верный алгоритм — 7 баллов.
(б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. На первом этаже большого дома находятся четыре гнома весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету за каждый этаж (независимо от того, сколько гномов в нём находится). Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифт можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже?

Ответ: 8 монет.

Решение.

Пример перевозок:
(а) Перевозим гномов с весом 20, 30 и 50 на 3 этаж (тратится 2 монеты).
(б) Гном с весом 20 спускается на 1 этаж (ещё 2 монеты).
(в) Гном с весом 40 кг садится в лифт. Лифт едет до 2 этажа, гном с весом 20 выходит (1 монета).
(г) Гном с весом 40 едет на 3 этаж (1 монета).
(д) К нему садится гном с весом 50 кг, они едут на 4 этаж (1 монета), гном с весом 40 кг выходит, гном с весом 50 кг едет до своего этажа (1 монета). Итого 8 монет.

Оценка: Заметим, что мы не можем перевезти всех гномов с первого на второй этаж за один раз (потому что нужно перевезти 20+30+40+50=140 кг). Значит, на этот перегон потребуется как минимум три монеты (два раза наверх и один раз вниз). Аналогично со второго на третий этаж мы должны перевезти как минимум 30+40+50=120 кг, а значит, и на этот перегон нужно три монеты. Остальные перегоны проезжаются за одну монету, и получается 3+3+1+1=8 — минимально возможное количество затраченных монет.

Критерии. Балла за 2-3 критерии суммируются
(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
(б) Если приведен алгоритм развозки за 8 монет — 3 балла.
(в) Доказано, что на 1 и 2 перегон они точно потратят минимум по 3 монеты — 3 балла

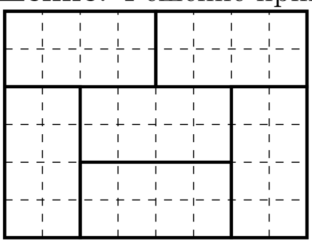
(г) Дан верный ответ — 1 балл
(д) Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
5 класс

Решения

1. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×8 на шесть одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника.

Решение. Решение приведено на рисунке.



Критерии.
(а) Приведено любое верное разрезание — 7 баллов
(б) Приведено неверное решение — 0 баллов

2. У Кати есть бочки массой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 кг (по одной бочке каждой массы). В бочке массой 2 кг находится 18 кг пшена, а остальные пустые. Еще у Кати есть чашечные весы без гирь. Как Кате разделить пшено на три равные части? Высыпать за пределы бочек пшено нельзя.

Решение.

Например, алгоритм может быть такой:
(а) Пересыпаем из 2 в 6 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 11 кг, а в 6ке 7 кг
(б) Пересыпаем Из 6 в 1 до равенства на весах. Тогда в 6ке оказывается 1кг, а в 1ке 6кг.
(в) Пересыпаем Из 2 в 3 до равенства на весах. Тогда в 2ке оказывается 6 кг, а в 3ке 5кг.
(г) Пересыпаем из 6ки в 3ку. В итоге в 1,2 и 3 оказывается по 6 кг, то есть мы смогли разделить на 3 равные части.

Критерии.
(а) Если приведен любой верный алгоритм — 7 баллов.
(б) Если решение неверное — 0 баллов.

3. На острове по кругу расположены сто селений туземцев. В центре круга находится хижина Вождя. Однажды некоторые селения на острове захватили варвары. После этого из каждого селения к вождю было послано по одному гонцу, и все они сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что туземцы будут говорить ему только правду, а варвары — только врать. Также Вождь понимает, что если селение захвачено, то его гонец — точно варвар, а если селение не захвачено, его гонец может быть как варваром, так и туземцем. Разведка донесла Вождю, что на его острове захвачена ровно половина селений, и у каждого захваченного селения хотя бы одно из соседних тоже захвачено (эта информация достоверная). Сколько туземцев могло быть среди посланных вождю гонцов? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: От 0 до 24.

Решение. Три захваченных села подряд быть не могут, иначе варвар из среднего села скажет правду. Но по условию и одиночное захваченное село быть не могло, а тогда они идут парами. Пусть из не захваченного села послан туземец. Тогда оба соседних с ним села захвачены. Если несколько не захваченных сел стоят подряд, то из них не могли быть посланы туземцы, так как у каждого такого села есть не захваченный сосед. То есть нас интересуют только не захваченные села, у которых оба соседа захвачены. Заметим, что не захваченных селений 50. Их нужно разделить на 25 групп (группы между двойками захваченных). 25 туземцев быть не может - тогда нужны были бы все 25 групп по 1 селу, тогда сел 25, а нам нужно 50. Остальные варианты от 0 до 24 туземцев возможны. Примеры: 0 туземцев: группы 2-2-....-2 1 туземец: группы 1-2-....2-3 2 туземца: группы 1-1-2....-2-4 и так далее 24 туземца: группы 1-1-1-....1-26

Критерии. Баллы за критерии 2-5 суммируются
(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
(б) Приведены примеры расстановски селений на 0-24 рыцаря — 2 баллов.
(в) Доказано, что рыцарь может выехать только из незахваченного селения, окруженного захваченными — 2 балла
(г) Доказано, что захваченные селения разбиваются на изолированные пары — 2 балла
(д) Объяснено, почему не может быть 25 рыцарей — 1 балл
(е) Если решение неверное — 0 баллов.

4. Даны пять последовательных натуральных чисел, каждое из которых больше 30. Для каждого числа на доску выписали количество его натуральных делителей (например, у числа 49 три делителя: 1, 7, 49). Может ли сумма пяти выписанных на доску чисел быть меньше 20?

Ответ: Не может.

Решение. Пять раз выписана единица. Как минимум два раза выписана двойка, как минимум по одному разу — тройка, четвёрка и пятёрка. То есть уже минимум 10 чисел. Кроме них, выписаны «парные» числа (т.е. число, при умножении на которое получается первоначальное число), и эти парные числа должны быть больше 5 (то есть они не учтены при выписывании единиц, двоек. троек, четвёрок и пятёрок), так как первоначальные числа больше 30 (т.е. при делении на 5 и менее получается больше 6). Это еще 10 чисел. Итого написано не менее 20 чисел.

Критерии. Баллы за критерии суммируются
(а) Показано, что минимум по 2 делителя на число есть (это число и 1) — 1 балл
(б) Сказано, сколько делителей возникает из-за 3ки, 5ки, 2ки, 4ки — 4 балла
(в) Объяснено, почему никакие делители из посчитанных не равны — 2 балла
(г) Дано неверное решение — 0 баллов

5. На первом этаже большого дома находятся четверо гномов весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету с каждого гнома за каждый этаж. Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифт можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже?

Ответ: 14 монет.

Решение. Пример перевозок:

(а) Перевозим гномов с весом 20, 30 и 50 на 3 этаж (тратится 6 монет).
(б) Гном с весом 20 спускается на 1 этаж (ещё 2 монеты).
(в) Гном с весом 40 кг садится в лифт. Лифт едет до 2 этажа (2 монеты), гном с весом 20 выходит.
(г) Гном с весом 40 едет на 3 этаж (1 монета).
(д) К нему садится гном с весом 50 кг, они едут на 4 этаж (2 монеты), гном с весом 40 кг выходит, гном с весом 50 кг едет до своего этажа (1 монета). Итого 14 монет.

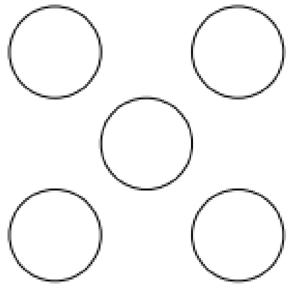
Оценка. Заметим, что мы не можем перевезти всех гномов с первого на второй этаж за один раз (потому что нужно перевезти 20+30+40+50=140 кг). Значит, на этот перегон потребуется как минимум шесть монет (каждого гнома нужно поднять наверх, но один ещё должен спуститься и снова подняться). Аналогично со второго на третий этаж мы должны перевезти как минимум 30+40+50=120 кг, а значит, на этот перегон нужно как минимум 5 монет. Перегон с третьего до четвёртого этажа проезжается за две монеты, с четвёртого до пятого — за одну монету. Итого минимум 6+5+2+1=14 — минимально возможное количество затраченных монет.

Критерии. Балла за 2-5 критерии суммируются
(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
(б) Если приведен алгоритм развозки за 14 монет — 3 балла.
(в) Доказано, что на 1 перегон они точно потратят минимум 6 монет — 2 балла
(г) Доказано, что на 2 перегон потратится минимум 5 монет — 1 балл
(д) Дан верный ответ — 1 балл
(е) Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
6 класс

Решения

1. Серёжа и Настя играют в игру, по очереди расставляя натуральные числа от 1 до 5 в ячейки X-образной диаграммы справа, начинает Настя. В каждой ячейке может стоять только одно число, в разных ячейках должны стоять разные числа. Сможет ли Настя играть так, чтобы в конце игры суммы чисел в диагоналях были не равны между собой?



Ответ: Да, сможет.

Решение. Пусть Настя поставит в центральную ячейку число 5. В конце игры сумма чисел в диагоналях будет равна в том и только том случае, когда в одной из диагоналей будут числа $1, 4, 5$, а в другой — $2, 3, 5$. Пусть без ограничения общности Серёжа поставил следующее своё число в левую верхнюю ячейку. Тогда Настя может поставить такое число в правую нижнюю ячейку, что в заполненной диагонали будет тройка чисел, не совпадающая ни с одно из троек $1, 4, 5$ и $2, 3, 5$. Следовательно, Настя сможет сделать так, чтобы суммы чисел в диагоналях были не равны между собой.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

Есть мысли про четное число по центру, но не доказано, что суммы отличаются — 5 баллов.

2. Семь детей разной силы образуют команды из двух человек (каждый может состоять в нескольких командах). Нельзя, чтобы в одной из команд каждый участник был сильнее, чем каждый в какой-то другой из команд. (Например, если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 4-й и 6-й, то это плохо; но если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 3-й и 6-й, то это допустимо.) Приведите пример, как дети могли образовать 15 команд.

Решение. Пронумеруем детей. Пусть 1 – самый сильный, второй по силе – 2, и так далее, самый слабый под номером 7. Составим команды. Сначала составим всевозможные команды, в которых первый ребенок 1, 2 или 3, а второй ребенок 5, 6 или 7. Таких пар 9. Еще возьмем всевозможные пары, в которых есть 4 ребенок. Таких пар 6.

Получилось 15 пар. В каждой паре есть ребенок, который по силе четвертый или сильнее, и есть ребенок, который четвертый или слабее. Значит, данный пример подходит.

Критерии.

Верный пример — 7 баллов

Неверный пример — 0 баллов

3. На доску 20×20 поставили 20 не бьющих друг друга ферзей. Докажите что в каждом угловом квадрате 10×10 стоит хотя бы один ферзь.

Решение. Отметим, что если на доске 20×20 стоит 20 ферзей, то в любой строке и в любом столбце стоит ровно один ферзь.

Предположим, что в каком-то угловом квадрате 10×10 нет ни одного ферзя. Повернем доску так, чтобы этим квадратом оказался левый верхний. Тогда в верхних 10 строках все ферзи стоят в правом квадрате 10×10. Аналогично, в первых 10 столбцах все ферзи стоят в нижнем квадрате 10×10. Тогда все 20 ферзей стоят в правом верхнем и левом нижнем квадратах 10×10.

19 диагоналей, идущих из правого верхнего угла в левый нижний, покрывают оба квадрата 10×10. Но на каждой диагонали стоит не более одного ферзя. Противоречие.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. На доске в ряд написано 12 единиц. Между некоторыми из них можно поставить знак «+», а можно не ставить. Сколькими способами можно расставить плюсы так чтобы сумма делилась на 30?

Ответ: 55.

Решение. Чтобы число делилось на 30, оно должно заканчиваться на 0. В зависимости от того, сколько плюсов поставить, может получиться от 1 до 12 слагаемых. Все слагаемые заканчиваются на 1. Значит, получить 0 на конце можно, сложив только 10 слагаемых.

Сумма состоит из 10 слагаемых, если нету "+"ровно в двух местах. В этих случаях сумма равна

$$111+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 120 \text{ или } 11+11+1+1+1+1+1+1+1+1 = 30.$$

В обоих случаях сумма делится на 30.

Найдем число способов расставить 9 знаков "+"в 11 промежутках. Посмотрим на левую позицию, в которой нету "+". Если это сама левая позиция, то есть 10 вариантов не ставить "+"еще в одном месте. Если это вторая слева позиция, то есть 9 вариантов не ставить "+"еще в одном месте. И так далее. Всего получаем

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55 \text{ способов.}$$

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Не объяснено почему при 9 плюсах и двух 11 именно 45 вариантов — 5 баллов.

(в) Если решение неверное — 0 баллов.

5. Вася выписал несколько пар натуральных чисел так, что любое число выписано не более двух раз. Петя переписал в блокнот некоторые из Васиных пар так, что любое число, встречавшееся у Васи, встречается у Пети ровно на один раз меньше. Всегда ли Вася может назвать несколько натуральных чисел так, чтобы в каждой из написанных им пар было названо ровно одно число?

Ответ: Да, всегда.

Решение.

Покажем, как Вася всегда сможет это сделать.

Сначала отметим, что ни одна пара не состоит из двух одинаковых чисел. В противном случае Петя не может ее взять, хотя должен взять пару с данным числом.

Посмотрим на какое-нибудь число a_1, которое выписано ровно один раз. С ним в паре записано число a_2. Если число a_2 состоит еще в какой-то паре с числом a_3, посмотрим в какой паре есть еще a_3 и так далее пока не дойдем до числа a_n, которое состоит в одной паре. Получим последовательность:

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_n.$$

В этой последовательности любые два соседние числа состоят в одной паре. Причем больше эти числа ни в каких парах не состоят. Петя смог взять некоторые пары так, что в них a_2, a_3, $\ldots$, a_{n-1} встречаются по разу. Тогда это могли быть только пары:

$$(a_2,\, a_3),\ (a_3,\, a_4),\ \ldots,\ (a_{n-2},\, a_{n-1}).$$

Следовательно, n — четно. Значит, Вася может покрасить числа a_1, a_3, $\ldots$, a_{n-1} и эти числа будут встречаться в каждой из рассмотренных пар, причем ровно по одному в паре. Будем действовать таким образом, пока не останутся только числа которые встречаются два раза.

Возьмем число, которое встречается два раза и будем аналогично выписывать числа в ряд так, чтобы два соседние числа были в одной паре. Отметим, что в этот раз в конце мы должны получить число с которого мы начинали (раз оно встречалось дважды).

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_k \to a_1.$$

Петя может взять некоторые пары так чтобы каждое число встречалось один раз. Это можно сделать только если k четно. Значит, Вася опять может покрасить числа a_1, a_3, $\ldots$, a_{k-1} и в каждой из рассмотренных пар будет встречаться ровно одно из этих чисел.

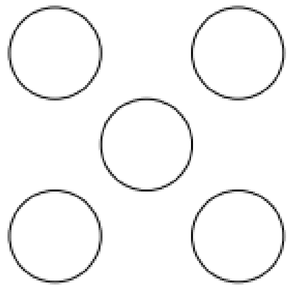
Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
7 класс

Решения

1. Серёжа и Настя играют в игру, по очереди расставляя натуральные числа от 1 до 5 в ячейки X-образной диаграммы справа, начинает Настя. В каждой ячейке может стоять только одно число, в разных ячейках должны стоять разные числа. Сможет ли Настя играть так, чтобы в конце игры суммы чисел в диагоналях были не равны между собой?



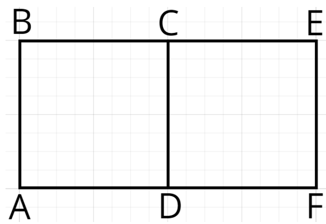
Ответ: Да, сможет.

Решение. Пусть Настя поставит в центральную ячейку число 5. В конце игры сумма чисел в диагоналях будет равна в том и только том случае, когда в одной из диагоналей будут числа $1, 4, 5$, а в другой — $2, 3, 5$. Пусть без ограничения общности Серёжа поставил следующее своё число в левую верхнюю ячейку. Тогда Настя может поставить такое число в правую нижнюю ячейку, что в заполненной диагонали будет тройка чисел, не совпадающая ни с одно из троек $1, 4, 5$ и $2, 3, 5$. Следовательно, Настя сможет сделать так, чтобы суммы чисел в диагоналях были не равны между собой.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

Есть мысли про четное число по центру, но не доказано, что суммы отличаются — 5 баллов.

2. На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DCEF$, как показано на картинке. По прямоугольнику $ABEF$ с постоянной скоростью по часовой стрелке бегает Крош, а по квадрату $ADCB$ с постоянной скоростью против часовой стрелки бегает Ёжик. Могло ли так случится, что ни в какой момент времени Крош и Ёжик не встретятся, если они бегают бесконечно долго?



Ответ: Нет, не могло.

Решение. Если скорость Кроша не меньше скорости Ёжика, то рассмотрим момент, когда Ёжик окажется в точке C. Чтобы Ёжику дойти до точки D, ему нужно пройти половину периметра прямоугольника $ABEF$. Так как скорость Кроша не меньше, то Крош за это же время пройдёт не меньше половины периметра прямоугольника $ABEF$. То есть за это время он обязательно побывает в левой половине прямоугольника $ABEF$. А так как Ёжик и Крош движутся в разных направлениях, то они обязательно встретятся.

Если же скорость Кроша меньше скорости Ёжика, то рассмотрим момент, когда Крош окажется в точке D. За время, пока Крош пройдет левую половину прямоугольника $ABEF$, Ёжик пройдет расстояние не меньшее, чем DC. Значит, за это время он обязательно побывает в левой половине прямоугольника $ABEF$. А так как Ёжик и Крош движутся в разных направлениях, то они обязательно встретятся.

Критерии.

(a) Полное решение — 7 баллов

(б) Разобран один из случаев — 2 балла

3. Все клетки нечётных столбцов доски 8×8 покрашены в чёрный цвет, а все клетки чётных столбцов — в белый. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых больше белых клеток, или тех, в которых больше чёрных клеток?

Ответ: Способов поровну.

Решение. Сопоставим каждому способу добраться из левой нижней угловой клетки в правую верхнюю другой способ, получающийся из данного симметрией относительно центра квадрата 8×8. Данное соответствие разбило все способы на пары и «особые» способы, которые при симметрии перейдут сами в себя. Заметим, что при симметрии относительно центра квадрата 8×8 чёрные клетки переходят в белые, и наоборот. Следовательно, во всех «особых» способах чёрных и белых клеток поровну, а в каждой паре способов, симметричных друг другу, количество белых и чёрных клеток в одном способе соответственно равно количество чёрных и белых клеток в другом способе. Следовательно, в каждой паре, а значит, и в целом, способов, в которых белых клеток больше, и способов, в которых чёрных клеток больше, поровну.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) При симметрии забыты «особые пути» — 3 балла.

4. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наибольший делитель, отличный от самого числа, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось более 9500 различных чисел?

Ответ: Нет.

Решение. Если число n чётное, то есть $n = 2k$, то его наибольший делитель равен k. Следовательно, сумма числа n и его наибольшего делителя равна $3k = \frac{3}{2}n$, то есть делится на 3. Если же число n нечётное, то и его наибольший делитель нечётный и не превосходит $\frac{n}{3}$. Следовательно, их сумма чётная и не превосходит $\frac{4}{3}n$.

Значит, среди выписанных чисел на доску встречаются только числа, которые или делятся на 3 и не превосходят $\frac{3}{2} \cdot 10000 = 15000$, или делятся на 2 и не превосходят $\frac{4}{3} \cdot 9999 = 13332$. Чисел первого вида $15000/3 = 5000$, а чисел второго вида $13332/2 = 6666$. Но среди чисел второго вида треть (2222) делится на 3, то есть они посчитаны и там, и там. Следовательно, всего чисел, выписанных на доску, не более $5000 + 6666 - 2222 = 9444$, что меньше 9500.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

5. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Докажите, что можно выбрать 29 человек и выстроить их в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Решение. Будем строить этот ряд по очереди, постепенно удлиняя его. В начале возьмём любых трёх человек, где один знает остальных двоих, — поставим его между ними. Теперь пусть мы уже построили ряд $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где A_i и A_{i+1} знают друг друга для любого $1 \leqslant i < n$. Если $n = 29$, то задача решена. Пусть $n < 29$, а оставшиеся люди — это B, C и, возможно, кто-то ещё. Рассмотрим четвёрку людей A_1, A_n, B и C. Один из них знает хотя бы двоих. Тогда в любом случае один из пары A_1, A_n должен знать одного из пары

B, C. Если A_n знает B или C, то можно добавить одного из них в конец ряда и условие не нарушится. Аналогично, если A_1 знает B или C, то можно добавить одного из них в начало ряда, и условие снова не нарушится. В любом случае мы смогли продлить ряд на одного человека с сохранением условия. Продолжая действовать таким образом, мы получим требуемый ряд из 29 человек.

Критерии. Полное решение — 7 баллов

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
8 класс

Решения

1. На доске написано 17 подряд идущих натуральных чисел. Андрей сосчитал сумму их попарных НОКов. (То есть нашёл наименьшее общее кратное первого и второго числа, потом первого и третьего, первого и четвёртого, ..., 16-го и 17-го и всё это сложил.) Могло ли у него получиться число 987654321?

Ответ: Не могло.

Решение. Среди 17 подряд идущих чисел окажется 8 или 9 нечётных чисел. Их попарных НОКов будет $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ или $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$, и все они будут нечётными. Остальные НОКи окажутся чётными. В любом случае сумма всех НОКов будет чётной.

Критерии.
Полное решение — 7 баллов
Есть арифметическая ошибка — 5 баллов

2. Все клетки нечётных столбцов доски 9×9 покрашены в чёрный цвет, а все клетки чётных столбцов — в белый. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых больше белых клеток, или тех, в которых больше чёрных клеток?

Ответ: Тех, в которых больше чёрных клеток.

Решение. Обозначим за X любую клетку в восьмом столбце. Зафиксируем эту клетку.

Заметим, что путей до X с преимуществом белых клеток столько же, сколько и путей до X с преимуществом чёрных клеток. В самом деле, любой такой путь с преимуществом белых клеток мы можем «перевернуть» и получить путь с преимуществом чёрных клеток.

Заметим теперь, что любой путь хромой ладьи до верхнего левого угла устроен так: он доходит до какой-нибудь клетки X, затем ладья ходит вправо и продолжает свой движение по девятому столбцу (который чёрный). От этого все варианты с равенством белых и чёрных клеток (и некоторые варианты с преимуществом белых) превращаются в варианты с преимуществом чёрных клеток. Превращения в обратную сторону не происходит.

Критерии.
Полное решение — 7 баллов
Остальное — 0 баллов

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, такой что $AB = 4$, $AD = 8$, $CD = 6$. Точка P — пересечение биссектрис углов A и D. Оказалось, что $PD = 10$, $\angle PBA = \angle PAB$. Найдите PC.

Ответ: 8.

Решение. Пусть K — середина AB, L — такая точка на AD, что $AL = 2$. Так как $AP = BP$, PK является серединным перпендикуляром к AB. Треугольники APK и APL равны ($AK = AL = 2$, AP общая и является биссектрисой A). Следовательно, $PL \perp AD$. Аналогично треугольники PDL и PDC равны ($LD = DC = 6$), а значит, угол C прямой. Отсюда по теореме Пифагора $PC = 8$.

Критерии.

Полное решение — 7 баллов

Остальное — 0 баллов

4. На доске написано несколько пар положительных чисел. Если пары (a, b) и (c, d) (не обязательно различные) выписаны, то Андрей также пишет и пару $(2ac, ad + bc)$. Через некоторое время Андрей понял, что какую бы пару он ни выписал, отношение первого числа этой пары ко второму равно отношению первого числа пары ко второму в одной из уже выписанных пар. Докажите, что это отношение для всех изначально выписанных пар было одинаковым.

Решение. Допустим противное. Возьмём две такие пары (a, b) и (c, d), для которых $a/b < c/d$, причём все остальные такие отношения или больше c/d, или меньше a/b. Выпишем пару $(2ac, ad + bc)$ и докажем, что $\frac{2a}{ad+bc} = \frac{2}{\frac{b}{a}+\frac{d}{c}}$ (т.е. отношение первого числа ко второму в новой паре — среднее гармоническое таких отношений в старых парах; из этого сразу будет следовать противоречие). Но это равенство немедленно доказывается приведением к общему знаменателю.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Также известно, что любые двое могут передать сообщение от одного к другому, передавая его только через знакомых. Докажите, что можно выстроить их всех в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Решение. Будем строить этот ряд по очереди, постепенно удлиняя его. В начале возьмём любых трёх человек, где один знает остальных двоих, — поставим его между ними. Теперь пусть мы уже построили ряд $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где A_i и A_{i+1} знают друг друга для любого $1 \leqslant i < n$. Если $n = 29$, то задача решена. Пусть $n < 29$, а оставшиеся люди — это B, C и, возможно, кто-то ещё. Рассмотрим четвёрку людей A_1, A_n, B и C. Один из них знает хотя бы двоих. Тогда в любом случае один из пары A_1, A_n должен знать одного из пары B, C. Если A_n знает B или C, то можно добавить одного из них в конец ряда и условие не нарушится. Аналогично, если A_1 знает B или C, то можно добавить одного из них в начало ряда, и условие снова не нарушится. В любом случае мы смогли продлить ряд на одного человека с сохранением условия. Продолжая действовать таким образом, мы получим ряд из 29 человек. Теперь будем добавлять последнего человека (назовем его X). Заметим, что если X знаком с A_1 или A_{29}, то у нас все уже получилось. Также заметим, что если люди A_1 и A_{29} знакомы, то мы можем начать обходить цикл $A_1A_2 \ldots A_{29}$ с какого-нибудь друга X, потом добавить самого X в начало, и получить нужный нам ряд. Пускай теперь A_1 и A_{29} не знакомы. Теперь посмотрим, знаком ли X с A_14 или A_15. Если незнаком, то в четверке $XA_1A_{29}A_{14}$ A_{14} знаком и с A_1, и с A_{29}, а в четверке $XA_1A_{29}A_{15}$ уже A_{15} знаком с A_1 и A_{29}. Тогда всех этих людей можно перестроить по кругу следующим образом: $A_1A_2 \ldots A_{14}A_{29}A_{28} \ldots A_{15}$. Тогда развернув этот круг начиная с друга X получим требуемый путь. Пусть теперь X дружит с кем-то из A_{14}, A_{15}, скажем A_k (важно, что вершины A_{k-1} и A_{k+1} не совпадают с первой и последней в пути). Тогда вершиной галочки в четверке $A_1A_kA_{29}X$ все равно является A_k, и значит он дружит еще с кем-то, кроме X, НУО, с A_1. Тогда рассмотрим A_{k-1}. Если он дружит с X, то X может встать между A_{k-1} и A_k. Иначе рассмотрим четверку $A_1A_{k-1}A_{29}X$. В ней условие задачи может выполниться только если A_{k-1} дружит с A_1 и с A_{29}. Тогда переставим людей следующим образом: $XA_kA_1A_2\dots A_{k-1}A_{29}A_{28}\dots A_{k+1}$. Такой порядок нам подходит.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
9 класс

Решения

1. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 12000 его наименьший натуральный делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 11999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось хотя бы 10000 различных чисел?

Ответ: Неверно.

Решение. Разобьём числа от 1 до 12000 на шестёрки подряд идущих чисел. Заметим, что числа $6n+3$ и $6n+4$ дадут нам одну и ту же сумму (к первому числу прибавится 3, ко второму 2). Таким образом у нас склеится значение у 2000 пар чисел, а значит, получится уже не более 10000 чисел. Также можно заметить, что 25, 27 и 28 дадут одну и ту же сумму, а значит, и 10000 различных сумм тоже недостижимо. Вообще-то последнее замечание избыточно, поскольку изначально чисел 11999, а не 12000.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Если есть идеи про то, что останутся только четные числа — 3 балла

2. Линейную функцию $g(x) = px + q$ с $p \neq 0$ назовём парадоксальной для квадратного трёхчлена f, если из двух трёхчленов $f(px + q)$ и $pf(x) + q$ один имеет хотя бы один вещественный корень, а другой не имеет. На доске написаны сто квадратных трёхчленов. Оказалось, что любые два квадратных трёхчлена имеют общую парадоксальную функцию. Докажите, что у всей сотни трёхчленов есть общая парадоксальная функция.

Решение. Пусть $g(x) = px+q$ — парадоксальная функция для трёхчлена $f(x) = ax^2+bx+c$. Заметим, что $f(x)$ и $f(px + q)$ либо оба имеют корни, либо оба не имеют. Обозначим за D дискриминант f. Рассмотрим несколько случаев.

Если $a > 0$ и $D \geqslant 0$, то $f(px+q)$ имеет корни, а тогда $pf(x)+q$ их не имеет. Следовательно, p и q должны быть одного знака (если $p > 0$, то график трёхчлена $pf(x)$ необходимо поднять вверх, чтобы он перестал иметь корни, а если $p < 0$, то наоборот, опустить).

Если $a > 0$ и $D < 0$, то $f(px + q)$ не имеет корней, а тогда $pf(x) + q$ их имеет. Следовательно, p и q должны быть разных знаков (если $p > 0$, то график трёхчлена $pf(x)$ необходимо опустить вниз, чтобы он стал иметь корни, а если $p < 0$, то наоборот, поднять).

Если $a < 0$ и $D \geqslant 0$, то p и q разных знаков. Доказывается аналогично.

Наконец, если $a < 0$ и $D < 0$, то p и q одного знака.

В каждом из этих случаев мы можем заменить числа p и q на 1 и q/p (результат не изменится при делении функции на ненулевую константу p). Также мы можем увеличить q, если $q > 0$, и уменьшить его, если $q < 0$, и функция останется парадоксальной.

Поскольку любые два из написанных трёхчленов имеют общую парадоксальную функцию, то произведение старшего коэффициента на дискриминант либо неотрицательно у всех трёхчленов, либо неположительно у всех трёхчленов. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично). Возьмём $P = 1$, а в качестве Q — максимум из значений q/p для попарных парадоксальных функций. Функция $g(x) = Px + Q$ подойдёт.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.

- Если решение неверное — 0 баллов.

3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Оказалось,что $\angle BDC = 60^\circ$ и биссектриса угла ABC перпендикулярна прямой CD. Докажите,что $AD + BD = CD$.

Решение. Отложим на луче DC точку E такую, что $DE = BD$тогда треугольник BDE — равнобедренный с углом 60° при вершине, а значит равносторонний, в частности D, E — симметричны относительно биссектрисы угла $\angle ABC$. Тогда из условия следует, что E лежит на отрезке DC и $\angle ABD = \angle EBC$. Но из теоремы синусов, равенства $BD = BE$ и вписанности имеем $\frac{EC}{\sin\angle EBC} = \frac{EB}{\sin\angle ECB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AD}{\sin\angle ABD}$, поэтому из предыдущего равенства получаем $AD = EC = DC - DE = DC - DB$, что и требовалось.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. Яша, Юра и Эдик решили съездить на рыбалку на пруд, но оказалось, что их мотоцикл вмещает лишь двоих, включая водителя. Тогда Яша с Юрой поехали на мотоцикле, а Эдик пошёл пешком. Яша отвёз Юру до пруда, вернулся за Эдиком, и они поехали вместе. По пути Эдик заметил, что Яше не стоило довозить Юру до пруда, а надо было высадить Юру немного раньше. И если бы Яша высадил Юру так, что все трое друзей добрались бы до озера одновременно, то они сэкономили бы 12% времени. Скорости пешеходов постоянны и равны между собой, скорость мотоцикла постоянна и более чем в два раза больше скорости пешехода. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости пешехода?

Ответ: в 7 раз.

Решение. Пусть скорость мотоцикла больше скорости пешехода в x раз. Обозначим A — начало пути, B — конец пути, C — точка, в которой Яша забрал Эдика в первом заезде, M — точка, в которой Яша забрал Эдика во втором заезде, N — точка, в которой Яша высадил Юру во втором заезде. За единицу длины примем расстояние AC, которое Эдик прошел пешком в первом заезде, а за единицу времени — время, за которое Эдик прошёл это расстояние.

Рассмотрим первый заезд. В нём Эдик прошел пешком расстояние $AC = 1$, а Яша проехал за это время расстояние x, которое равно пути $AB + BC$. Вместе они преодолели расстояние $2\,AB = AC + AB + BC = 1 + x$.

Найдём время первого заезда. Эдик за время 1 преодолеет расстояние AC. Яша за это время проедет путь $AC + CB + BC$. Далее Эдик и Яша на мотоцикле проедут расстояние CB. Так как расстояние $AC = 1$, то Яша проедет AC за время $1/x$. Поэтому путь $CB + BC$ он проедет за время $(1 - 1/x)$, а путь CB — за время $(1 - 1/x)/2$. Итого на весь путь рыбаки потратят $1 + (1 - 1/x)/2 = \frac{3\,x-1}{2\,x}$.

Рассмотрим второй заезд. Пусть а этом случае Эдик прошел пешком расстояние $AM = a$, а Юра — $NB = b$. Тогда $a + x\,a = 2\,AN$, $b + x\,b = 2\,MB$, и можно составить два уравнения

$$a + x\,a + 2\,b = 2\,AB, \quad b + x\,b + 2\,a = 2\,AB.$$

Вычитая из первого второе, получаем $AM = a = b = NB$. Подставляя в первое $a = b$ и $2\,AB = 1 + x$, получаем $AM = a = \frac{x+1}{x+3}$.

Рассуждая аналогично первому заезду получаем, что общее время второго заезда составляет

$$a + \frac{a}{x} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{x}\right) = a\,\frac{3\,x+1}{2\,x} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{3\,x+1}{2\,x},$$

что составляет 88% от времени первого заезда. Поэтому

$$\frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{3\,x+1}{2\,x}=\frac{88}{100}\cdot\frac{3\,x-1}{2\,x},$$

откуда $x_1 = 7$ или $x_2 = \frac{13}{9}$. Второй корень — посторонний, так как по условию $x > 2$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. В квадрате 9×9 первый, четвёртый и седьмой столбцы покрашены в красный цвет, второй, пятый и восьмой столбцы — в синий, остальные в жёлтый цвет. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых красных клеток больше, чем синих, или тех, в которых синих клеток больше, чем жёлтых?

Ответ: Способов поровну.

Решение. Пусть A — множество путей хромой ладьи, в которых красных клеток больше, чем синих, а B — множество путей, в которых синих клеток больше, чем жёлтых. Приведём взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее каждому пути из A путь из B. Рассмотрим путь из A. Он состоит из некоторого подпути x, хода в девятый столбец и k ходов в 9 столбце (возможно, $k = 0$). Сопоставим ему следующий путь: сперва сделаем k ходов вверх, затем ход вправо, потом применим подпуть x. Ясно, что такое преобразование обратимо и ставит в соответствие пути из A и B.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
10 класс

Решения

1. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наименьший делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Найдётся ли какое-нибудь число, которое повторяется хотя бы шесть раз?

Ответ: Не найдётся.

Решение. Допустим, что число M повторилось хотя бы шесть раз. Рассмотрим один из таких моментов: пусть $M = a + p$, где p — наименьший (простой, естественно) делитель a, кроме единицы. Значит, M делится на p. Рассуждая аналогично, M должно делиться ещё на пять простых чисел, причём эти простые числа должны быть разными (при совпадении p будут совпадать и исходные числа, из которых получили a).

Итак, M делится хотя бы на шесть различных простых чисел. Но наименьшее такое число — это $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030 > 10000$. Противоречие.

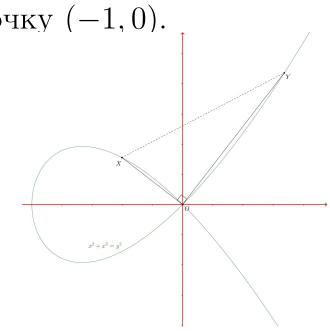
Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Неправильно посчитана нижняя граница минимального числа с 6 повторами, но все остальное верно — 5 баллов

2. На координатной плоскости с началом координат O отмечены все точки (x, y), удовлетворяющие соотношению $x^2 + x^3 = y^2$. Кирилл взял отмеченные точки A и B, такие что $OA \perp OB$. Докажите, что прямая AB проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора A и B.

Решение. Докажем, что прямая AB должна проходить через точку $(-1, 0)$.



Пусть A имеет координаты (x_0, y_0), а B — (x_1, y_1). У нас есть три условия: A лежит на кривой $x^2 + x^3 = y^2$ (на рисунке показан график этой кривой); B лежит на этой кривой; $OA \perp OB$. Это записывается следующей системой:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0^3 = y_0^2 \\ x_1^2 + x_1^3 = y_1^2 \\ x_0x_1 + y_0y_1 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы имеем $x_0^2x_1^2 = y_0^2y_1^2 = (x_0^2 + x_0^3)(x_1^2 + x_1^3) = x_0^2x_1^2(1+x_0)(1+x_1)$, откуда $1 = (1+x_0)(1+x_1)$, или $x_0+x_1+x_0x_1 = 0$ (точки A и B, очевидно, должны иметь ненулевые абсциссы).

Уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1}.$$

Подставим в это уравнение $x = -1$, $y = 0$. Нам надо доказать, что

$$\frac{-1 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{-y_1}{y_0 - y_1}.$$

Иначе говоря, необходимо доказать равенство

$$(1+x_1)(y_0-y_1)=y_1(x_0-x_1).$$

Домножим обе части на y_0+y_1 (случай $y_0=-y_1$ рассмотрим позже).

$$(1+x_1)(y_0^2-y_1^2)=y_1(y_0+y_1)(x_0-x_1),$$

$$(1+x_1)(x_0^2+x_0^3-x_1^2-x_1^3)=y_1(y_0+y_1)(x_0-x_1),$$

$$(1+x_1)(x_0-x_1)(x_0+x_1+x_0^2+x_0x_1+x_1^2)=y_1(y_0+y_1)(x_0-x_1).$$

Сократим на x_0-x_1 (так как тождество будет доказываться «снизу вверх», то нам не нужно будет проверять случай $x_0=x_1$) и воспользуемся тем, что $x_0+x_1+x_0x_1=0$:

$$(1+x_1)(x_0^2+x_1^2)=y_1(y_0+y_1);$$

$$x_0^2+x_1^2+x_0^2x_1+x_1^3=y_0y_1+y_1^3;$$

$$x_0^2+x_0^2x_1=y_0y_1.$$

Так как $y_0y_1=-x_0x_1$, нам нужно доказать

$$x_0^2+x_0^2x_1=-x_0x_1;$$

$$x_0(x_0+x_1+x_0x_1)=0,$$

что является верным тождеством. Значит, либо верно искомое тождество, либо $y_0=-y_1$.

Пусть $y_0=-y_1$. Тогда $y_0^2=y_1^2$, то есть $x_0^2-x_0^3=x_1^2+x_1^3$. Перенесём все слагаемые в обе части и разложим на множители:

$$(x_0-x_1)(x_0+x_1+x_0^2+x_0x_1+x_1^2)=0;$$

$$(x_0-x_1)(x_0^2+x_1^2)=0.$$

Так как x_0 и x_1 не равны 0, то $x_0=x_1$. Вспоминая, что $y_0=-y_1$, имеем

$$x_0^2+x_0^3=y_0^2=-y_0y_1=x_0x_1=x_0^2,$$

откуда $x_0^3=0$, что невозможно.

Критерии.

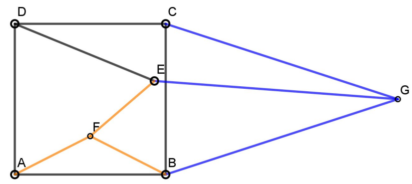
(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Неполный счет — 0 баллов

3. $ABCD$ — квадрат. Внутри него взята точка F, для которой $\angle FAB=\angle FBA=27^\circ$, а снаружи — точка G такая, что $\angle ABG=\angle DCG=162^\circ$. Найдите величину угла FDG.

Ответ: 45°.

Решение.



Пусть E — точка, симметричная вершине A относительно прямой DF. Тогда $FE = FA = FB$, то есть F — центр описанной окружности треугольника AEB, откуда $\angle AEB = 0.5\angle AFB = 63°$. Кроме того, так как $DE = DA = DC$, то E лежит на окружности (D, DA), откуда $\angle AEC = 270°/2 = 135°$. Следовательно, $\angle CEB = 360° - 135° - 63° = 162°$. Но тогда в окружности, описанной вокруг треугольника BEC, центральный угол, опирающийся на BC, равен $360° - 2 \cdot 162° = 36°$, а значит, центром этой окружности является G.

Мы получили, что четырёхугольники $DCGE$ и $DAFE$ являются дельтоидами, а значит, DG и DF являются биссектрисами углов CDE и EDA соответственно. Следовательно, $\angle FDG = 0,5\angle CDA = 45°$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Сведение к большому выражению или подсчет округленных значений — не больше 1 балла

(в) Неполный счет — 0 баллов

4. Яша, Юра и Эдик решили съездить на рыбалку на пруд, но оказалось, что их мотоцикл вмещает лишь двоих, включая водителя. Тогда Яша с Юрой поехали на мотоцикле, а Эдик пошёл пешком. Яша отвёз Юру до пруда, вернулся за Эдиком, и они поехали вместе. По пути Эдик заметил, что Яше не стоило довозить Юру до пруда, а надо было высадить Юру немного раньше. И если бы Яша высадил Юру так, что все трое друзей добрались бы до озера одновременно, то они сэкономили бы 12% времени. Скорости пешеходов постоянны и равны между собой, скорость мотоцикла постоянна и более чем в два раза больше скорости пешехода. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости пешехода?

Ответ: в 7 раз.

Решение. Пусть скорость мотоцикла больше скорости пешехода в x раз. Обозначим A — начало пути, B — конец пути, C — точка, в которой Яша забрал Эдика в первом заезде, M — точка, в которой Яша забрал Эдика во втором заезде, N — точка, в которой Яша высадил Юру во втором заезде. За единицу длины примем расстояние AC, которое Эдик прошел пешком в первом заезде, а за единицу времени — время, за которое Эдик прошёл это расстояние.

Рассмотрим первый заезд. В нём Эдик прошел пешком расстояние $AC = 1$, а Яша проехал за это время расстояние x, которое равно пути $AB + BC$. Вместе они преодолели расстояние $2\,AB = AC + AB + BC = 1 + x$.

Найдём время первого заезда. Эдик за время 1 преодолеет расстояние AC. Яша за это время проедет путь $AC + CB + BC$. Далее Эдик и Яша на мотоцикле проедут расстояние CB. Так как расстояние $AC = 1$, то Яша проедет AC за время $1/x$. Поэтому путь $CB + BC$ он проедет за время $(1 - 1/x)$, а путь CB — за время $(1 - 1/x)/2$. Итого на весь путь рыбаки потратят $1 + (1 - 1/x)/2 = \frac{3\,x-1}{2\,x}$.

Рассмотрим второй заезд. Пусть а этом случае Эдик прошел пешком расстояние $AM = a$, а Юра — $NB = b$. Тогда $a + x\,a = 2\,AN$, $b + x\,b = 2\,MB$, и можно составить два уравнения

$$a + x\,a + 2\,b = 2\,AB, \quad b + x\,b + 2\,a = 2\,AB.$$

Вычитая из первого второе, получаем $AM = a = b = NB$. Подставляя в первое $a = b$ и $2\,AB = 1 + x$, получаем $AM = a = \frac{x+1}{x+3}$.

Рассуждая аналогично первому заезду получаем, что общее время второго заезда составляет

$$a + \frac{a}{x} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{x}\right) = a\,\frac{3\,x+1}{2\,x} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{3\,x+1}{2\,x},$$

что составляет 88% от времени первого заезда. Поэтому

$$\frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{3\,x+1}{2\,x}=\frac{88}{100}\cdot\frac{3\,x-1}{2\,x},$$

откуда $x_1 = 7$ или $x_2 = \frac{13}{9}$. Второй корень — посторонний, так как по условию $x > 2$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Взят не тот корень правильного квадратного уравнения — 6 баллов

5. В стране 30 городов, некоторые города соединены между собой дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города). Известно, что среди любых пяти городов найдутся хотя бы три дороги между этими городами. Докажите, что можно объехать 29 городов, не побывав ни в одном городе дважды.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а ребрами – дороги. По условию он связен, и для любых 5 вершин есть хотя бы 3 ребра между ними. Рассмотрим самый длинный путь, в котором никакая вершина не повторяется. Пусть количество вершин в нем L. Наша цель заключается в том, чтобы доказать, что $L \geqslant 29$.

Для начала заметим, что $L \geqslant 3$, потому что иначе никакие 2 не имеют общих концов, что противоречит связности. Теперь заметим, что либо $L = 30$ (что нас устраивает), либо конца пути длины L не соединены ребром. Действительно, пусть они соединены ребром. Значит этот путь на самом деле цикл. Тогда из вершин этого цикла ребра не могут выходить наружу, так как иначе можно было бы удлинить путь (разорвав цикл рядом с вершиной, из которой ребро выходит наружу). Но тогда цикл образует компоненту связности, значит других вершин нет и $L = 30$.

Теперь покажем, что $L \geqslant 15$. Пусть $A_1A_2\ldots A_L$ – наш путь. Тогда из A_1 и A_L ребра не ведут в вершины, не лежащие в пути (иначе можно удлиннить путь). Тогда заметим, что если $L < 15$, то вне пути есть хотя бы 16 вершин. Рассмотрим любые 3 из них и добавим к ним концы пути. По условию в этой пятерке хотя бы 3 ребра, и они могут проходить только среди трех вершин, которые вне пути, значит все те ребра есть (потому что их ровно 3). Это означает, что на вершинах, которые оказались вне пути имеет место полный граф, а значит и путь длины хотя бы 16. Значит мы поняли, что $L \geqslant 15$. Это означает, что далее мы можем пользоваться существованием различных вершин A_1, A_2, A_3, A_L в нашем пути.

Предположим, что $L < 29$, Тогда есть хотя бы 2 вершины, которые не попали в путь, назовем их X и Y, вершины пути все так же называются $A_1, A_2, \ldots, A_L$. Тогда в нашем графе отсутствуют ребра XA_1, XA_L, YA_1, YA_l, потому что иначе можно было бы добавить X или Y в один из концов пути. Также мы уже знаем, что нет ребра A_1A_L. Рассмотрим 2 случая: XY не соединены ребром и XY соединены ребром.

Случай 1. Тогда в четверке XYA_1A_L нет ни одного ребра. Рассмотрим пятерку $XYA_1A_2A_L$. В ней есть хотя бы 3 ребра, значит из ребер A_2X, A_2Y, A_2A_1, A_2A_L отсутствует не более чем одно. Аналогично среди ребер A_3X, A_3Y, A_3A_1, A_3A_L отсутствует не более, чем одно. Значит всего из этих восьми ребер отсутствуют не более, чем 2. Среди ребер XA_2 и XA_3 в графе есть не более, чем одно, иначе вершину X можно вставить в путь между A_2 и A_3, аналогично из ребер YA_2 и YA_3 есть не более, чем одно. Значит остальные 4 ребра точно есть в графе, в частности ребра A_1A_3 и A_2A_L. Но тогда мы сразу нашли путь длины L, у которого концы соединены ребром – это $A_2A_1A_3\ldots A_L$. Противоречие, значит этот случай невозможен.

Случай 2. Заметим, что в таком случае в графе нет ребер XA_2 и YA_2, иначе можно было бы пару XY вставить в начало пути вместо A_1. Тогда Рассмотрим пятерку $XYA_1A_2A_L$.

В ней уже гарантированно отсутствуют все ребра, кроме A_1A_2, A_2A_n и XY, значит все эти ребра есть в графе. Тогда рассмотрев путь $A_1A_2A_LA_{L-1}\dots A_3$ длины L поймем, что ни одна из вершин X, Y не соединена с A_3.Также из существования этого пути следует, что его концы не соединены, то есть A_1A_3 отсутствует. Тогда в пятерке $A_1A_3A_LXY$ точно отсутствуют все ребра, кроме XY и A_3A_L, что противоречит условию. И в этом случае получаем противоречие.

Значит $L \geqslant 29$, что и требовалось доказать.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Решение полагается на то что длина максимального пути $\leqslant 3$ ребра, но этот факт не доказывается — 6 баллов
- Если человек пользуется существованием второй и третьей вершины в пути, не обосновывая — дыра в 1 балл.
- Если решение неверное — 0 баллов.
- Применение теоремы Дирака — 0 баллов

Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
5 октября 2024 года
11 класс

Решения

1. Числа $a < b$ таковы, что их НОД имеет 39 делителей (включая 1 и себя), а их НОК — 77 делителей. Докажите, что $b = a^2$.

Решение. Напомним следующий факт.

Пусть $x = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$. Тогда количество делителей равно $(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_k+1)$.

Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$, тогда $d = p^{38}$ или $d = p^{12}q^2$ для некоторых простых p и q.

Пусть $M = \text{НОК}(a, b)$, тогда $M = p^{76}$ или $M = p^{10}q^6$. Случай $M = p^{10}q^6$ противоречит любому из случаев выбора d, так как M должно делиться на d. Значит, $M = p^{76}$, а тогда $d = p^{38}$, то есть a и b — степени p. Если точнее, $a = p^{38}$, $b = p^{76}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Пропущен разбор некоторых случаев разложений a и b — 5 баллов

(в) Решение опирается на то что $b = a^2$ — 0 баллов

2. На доске написано несколько линейных функций. Андрей заметил, что если взять две любые написанные функции, перемножить их и взять производную результата, то полученная функция тоже окажется написанной на доске. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.

Решение 1. Докажем, что все эти функции имеют общий корень (и тогда их графики, очевидно, проходят через одну точку). В самом деле, допустим противное и рассмотрим такие две выписанные функции f и g с несовпадающими корнями a и b, что но ни у одной из выписанных функций корень не находится между a и b (такие, очевидно, найдутся). Перемножим эти функции; вершина полученного квадратного трёхчлена fg является средним арифметическим a и b. Но эта вершина является экстремумом fg, т.е. корнем производной fg. Противоречие.

Решение 2. Заменим каждую линейную функцию $f(x) = kx + b$ на пару чисел (k, b). Тогда, если у нас есть пары (a, b) и (c, d), то мы можем написать пару $(2ac, ad + bc)$, что сводит нашу задачу к аналогичной задаче 8 класса.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

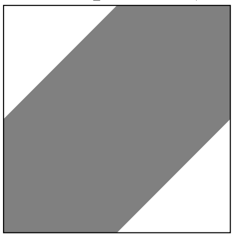
(б) Потеряны прямые вида $-\frac{1}{2}x + b$ — снять 3 балла

(в) Неправильно доказана конечность функций вида $\pm\frac{1}{2}x + b$ — снять 2 балла

3. У Ани и Бори есть проволочная окружность, и они её решили поделить. Аня поставила на этой окружности метку в случайно выбранной точке, которую Боря не видит. Боря случайным образом выбирает две точки на окружности (выбор второй точки не зависит от выбора первой) и разрезает окружность в этих двух точках. Аня берёт себе ту часть окружности, в которой находится выбранная ей точка. Найдите вероятность того, что Анин кусок окажется длиннее Бориного.

Ответ: $3/4$.

Решение. Переформулируем задачу. Представим, что указанная окружность есть единичный отрезок (отождествляем 1=0, но для задачи это неважно), а Анина метка стоит в точке 0. Боря случайно выбирает две точки, которые разбивают отрезок на три части. После этого Аня берёт первую и третью часть отрезка, а Боря вторую. После такой переформулировки задача становится классической задачей на геометрическую вероятность: по оси абсцисс отмечаем первый разрез, по оси ординат — второй. На рисунке закрашена область, где Аня выигрывает; её площадь, очевидно, равна $3/4$ от площади единичного квадрата.



Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Ошибки в вычислениях, в итоге неправильный ответ, но решение верное — снять 2 балла

(в) Перепутаны победа и поражение — снять 1 балл

4. Дан треугольник ABC. Точка I — центр вписанной окружности, E, F, G — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. На отрезке AF отмечена точка K, такая что $KF = FC$, а на продолжении AC за точку C отмечена точка L, такая что $AK = CL$. Прямая KI пересекается с отрезком EG в точке M. Отрезки IL и BC пересекаются в точке N. Докажите, что угол KMN прямой.

Решение. Поскольку $IE \perp EN$ (радиус и касательная), достаточно показать, что точки I, M, E, N лежат на одной окружности (с диаметром IN). Для этого достаточно показать равенство углов $\angle IMG = \angle INE = \angle CNL$.

Пусть углы треугольника ABC равны $\alpha = \angle A, \beta = \angle B, \gamma = \angle C$. Треугольник AIL равнобедренный (высота IF совпадает с медианой) с углом $\angle IAL = \frac{\alpha}{2}$ при основании, значит, из треугольника CNL имеем $\angle CNL = \pi - (\pi - \gamma) - \frac{\alpha}{2} = \gamma - \frac{\alpha}{2}$.

Аналогично, треугольник I равнобедренный с углом $\frac{\gamma}{2}$ при основании, а треугольник GBE равнобедренный с углом $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ при основании. Значит, из четырехугольника $AGMK$ можем найти $\angle IMG = \angle KMG = 2\pi - (\pi - \frac{\alpha+\gamma}{2}) - (\pi - \frac{\gamma}{2}) - \alpha = \gamma - \frac{\alpha}{2} = \angle CNL$, что и требовалось.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если решение неверное — 0 баллов.

5. В социальной сети «ВТомате» зарегистрирован ровно миллион пользователей, некоторые из которых являются друзьями. Оказалось, что если пользователи A и B друзья, и у них d_1 и d_2 друзей соответственно, то $d_1 \cdot d_2 \leqslant 10000$. Владелец сети Паша Помидуров посмотрел, сколько друзей у каждого пользователя, и сложил все эти числа. Могло ли у него получиться число, большее ста миллионов?

Ответ: Нет.

Решение 1. Давайте сначала оставим только тех, кто дружит хоть с кем-нибудь, потому что те, у кого 0 друзей, не вносят вклада в посчитанную сумму. Пускай количества друзей у этих людей это $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и S — сумма, посчитанная Пашей. Тогда по условию для любых двух друзей — i-го и j-го — справедливо, что $a_i \cdot a_j \leqslant 10000$. Прологарифмируем это неравенство (все a_i хотя бы 1). Получим, что $\ln a_i + \ln a_j \leqslant 2\ln 100$. Просуммируем эти неравенства для всех пар друзей. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \leqslant 2E \ln 100,$$

где E — количество пар друзей в нашей сети. Заметим, что $2E = S$, потому что каждая дружба ровно 2 раза учтена в S. Значит мы имеем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \leqslant S \ln 100.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x \ln x$. Её вторая производная $f''(x) = \frac{1}{x}$, поэтому f выпукла вниз на $[1, +\infty)$. Тогда применяя неравенство Йенсена, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqslant nf\left(\frac{S}{n}\right) = S \ln\left(\frac{S}{n}\right).$$

Таким образом мы получили, что

$$S \ln 100 \leqslant S \ln\left(\frac{S}{n}\right),$$

откуда $S \leqslant 100n \leqslant 100000000$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Давайте сначала оставим только тех, кто дружит хоть с кем-нибудь, потому что те, у кого 0 друзей, не вносят вклада в посчитанную сумму. Пускай количества друзей у этих людей это $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и S — сумма, посчитанная Пашей. Тогда по условию для любых двух друзей — i-го и j-го — справедливо, что $a_i \cdot a_j \leqslant 10000$. Зафиксируем индекс i и сложим неравенства из условия по всем j – друзьям i. Получим

$$\sum_{j \in N(i)} a_i a_j \leqslant 10000 a_i$$

($N(x)$ — множество всех друзей x). Разделим это неравенство на a_i. Получим

$$\sum_{j \in N(i)} a_j \leqslant 10000.$$

Теперь сложим эти неравенства по всем индексам i. Тогда каждое a_i войдет в эту сумму a_i раз — по одному за каждого друга i. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant 10000n.$$

Но тогда

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \leqslant 100n.$$

(Первое неравенство это неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом.) Таким образом $S \leqslant 100n \leqslant 100000000$, что и требовалось доказать.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Из небольшого среднего количества ребер в некоторых группах делается необоснованный вывод о небольшом среднем количестве ребер во всем графе — 0 баллов.

• Решение опирается на существование полного паросочетания, но доказательства его наличия нет — 0 баллов.