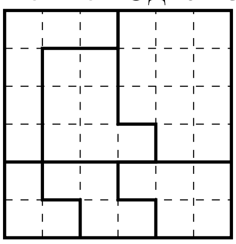
Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
4 класс

Решения

1. Разделите квадрат 6×6 клеток на шесть различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками. Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток.

Решение. Одно из решений приведено на рисунке.



Критерии. Если приведено любое верное решение — 7 баллов, неверное — 0 баллов. Частые ошибки: одинаковые площади фигур или наличие прямоугольников 1×1 или 1×2.

2. В племени Курумба неделя состоит из нескольких дней (не обязательно из семи). Вождь этого племени несколько раз отвечал на вопрос, какой сегодня день недели. Оказалось, что 15 сентября, 15 октября и ещё хотя бы в один день между этими датами он ответил «Тумба», 24 сентября — «Мумба», 30 сентября — «Лумба». А сколько дней в неделе у племени Курумба?

Ответ: 10.

Решение. Так как 15 сентября и 15 октября в племени один и тот же день недели, то 30 (столько дней от 15 сентября для 15 октября) делится на количество дней недели, а тогда возможное количество дней — 3, 5, 6, 10 или 15 (не 30, иначе бы между 15 сентября и 15 октября не было дня с таким же названием). Но 15 не делится на количество дней недели (иначе бы 30 сентября тоже была бы «Тумба»), а тогда количество дней — не 3 и не 5. Аналогично и 6 не делится на это количество (иначе 24 и 30 сентября были бы одинаковыми днями). Остаётся ответ 10.

Критерии.

• Если приведено полное решение (в том числе полный перебор) — 7 баллов.

• Доказано, что 15 не делится на число дней недели ИЛИ что 6 не делится ИЛИ (при решении перебором) забыт один вариант — 5 баллов.

• Если доказано, что 30 делится на число дней — 3 балла.

• Если решение неверное (в том числе полный перебор вариантов без доказательства про 30, в котором потерян более, чем 1 вариант) — 0 баллов.

3. Находясь на пересечении Длинного проспекта и Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта. Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одного перекрёстка до следующего) за 8 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром, но обязательно на одном из перекрёстков. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно), а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение?

Ответ: Не сможет.

Решение. Александр тратит чётное число минут, чтобы дойти до перекрёстка (любого). Динара тоже тратит чётное число минут на прохождение квартала, но ей ещё надо нечётное число раз перейти проспект, чтобы оказаться на противоположной стороне. Значит, Динаре нужно нечётное число минут, чтобы оказаться на перекрёстке с той же стороны проспекта, что и Александр. Таким образом, встретиться они вообще не смогут.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Соня поставила в каждую из клеток квадрата 3×3 рыцаря или лжеца (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Оказалось, что на доске есть как рыцари, так и лжецы, причём каждый из 9 людей может сказать фразу: «Больше половины моих соседей по стороне — рыцари!». Сколько рыцарей на доске?

Ответ: 6 рыцарей.

Решение.

Заметим, что если в углу стоит рыцарь, то в обоих соседних клетках тоже рыцари. Обратно: если в середине стороны стоит лжец, то оба его соседа, стоящих в углах, лжецы.

Теперь рассмотрим всевозможные варианты того, кем оказались люди в серединах сторон.

Вариант 1. Все люди, стоящие в серединах сторон — рыцари. Тогда во всех углах тоже рыцари, и в центре тоже должен быть рыцарь. Но тогда на доске нет ни одного лжеца.

Вариант 2. Ровно один человек в середине стороны — лжец. Пусть для определённости он находится в верхней строке. Тогда в верхней строке должны быть три лжеца. С другой стороны, углы нижней строки окружены рыцарями, а значит, в этих углах могут стоять только рыцари. Наконец, центральную клетку окружают три рыцаря и лжец, а значит, в ней стоит рыцарь.

Вариант 3. Хотя бы два человека в серединах смежных сторон (пусть это верхняя строка и правый столбец) — лжецы. Тогда вся верхняя строка и весь правый столбец состоит из лжецов. А значит, и в центральной клетке должен стоять лжец (среди его соседей уже есть два лжеца). А тогда и в середине нижней строки и левого столбца также стоят лжецы (у них уже два соседа лжецы). Оставшийся человек тоже должен быть лжецом. Но тогда нет ни одного рыцаря.

Вариант 4. В серединах сторон тоже есть два лжеца, но они на противоположных сторонах (допустим, сверху и снизу). Тогда в верхней и нижней строках исключительно лжецы. Но тогда и в остальных клетках должны быть лжецы, ибо каждая из них уже окружена двумя лжецами — вновь все оказались лжецами.

Итак, в единственном возможном способе (вариант 2) 6 рыцарей.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Если забыт 1 случай при переборе ИЛИ забыто, что не могут быть все рыцари — 5 баллов.

• Рассмотрены только ситуации «рыцарь в углу и лжец в середине стороны» ИЛИ потеряно более 1 случая при переборе — 3 балла.

• Приведен только один пример и верный ответ — 0 баллов.

- Если решение неверное — 0 баллов.

5. Петя умеет делать с числами две операции:
(а) увеличивать число на 6;
(б) вписывать 0 между двумя любыми цифрами числа.
Он хочет из числа 66 получить число 66666. Какое наименьшее количество операций ему для этого понадобится?

Ответ: 33 операции.

Решение. Опишем, как за 11 операций вставить 6 между предпоследней и последней цифрами. Для этого нужно вставить туда 0, а потом десять раз добавить 6. За три таких процедуры (итого понадобится 33 операции) получим число 66666.
Докажем, что менее чем за 33 операции мы не сможем добиться результата. Сделаем обратный ход: из числа можем вычесть 6, а если в этом числе стоит 0 (не первой и не последней цифрой), то мы его можем вычеркнуть. Изначально у нас число 66666, из которого мы хотим получить 66.
Первые десять операций однозначны — мы вычитаем 6. После этого мы можем либо вычеркнуть образовавшийся 0 и применить то же рассуждение к числу с меньшим количеством шестёрок, либо проигнорировать ноль и продолжить вычитать 6.
В последнем случае, чтобы получить хоть какой-то ноль (не на последнем месте), мы должны будем ещё 17 раз вычитать 6, и у нас окажется число 66504. И мы уже потратили 27 операций. Нетрудно заметить, что четырёх операций нам заведомо не хватит, чтобы получить 66.

Критерии.

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Имеются незначительные ошибки в оценке — 5-6 баллов.

(в) Приведён верный ответ и алгоритм получения за это число шагов — 3 балла.

(г) Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
5 класс

Решения

1. Петя умеет делать с числами две операции:
(а) увеличивать число на 18;
(б) вписывать цифру 8 между двумя любыми цифрами.
Как ему из числа 18 получить число 181716? Достаточно привести один способ.

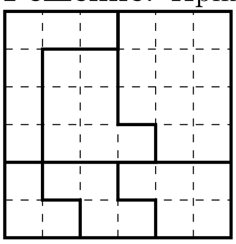
Решение. Например, нужно три раза вставить 8 (получится число 18888), а затем 9046 раз прибавлять 18.
Есть и другие варианты, но ключевой момент — восьмёрку необходимо вставлять ровно три раза. В самом деле, прибавление 18 не меняет остатка при делении на 9. А если вставить 8, то остаток уменьшится на 1 по признаку делимости на 9 (если остаток был нулевой, то остаток полученного числа будет равен 8). А нам нужно получить из нулевого остатка остаток 6.

Критерии. Приведен любой верный алгоритм — 7 баллов, неверное решение — 0 баллов.

2. На какое максимальное количество различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками, можно разделить квадрат 6×6 клеток? Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток.

Ответ: на 6 частей.

Решение. Пример такого разрезания приведён на рисунке.



Докажем, что больше шести частей сделать нельзя. Упорядочим части по возрастанию. Наименьшая возможная площадь одной части — три клетки (если у нас будет одно- или двуклеточная часть, то это обязательно прямоугольник). Итак, наименьшая часть содержит не менее 3 клеток, следующая по величине — не менее 4, следующая не менее 5, и т.д. Если частей хотя бы 7, то они занимают не менее 3+4+5+6+7+8+9=42 клетки, а всего у нас 36 клеток. Противоречие.

Критерии. Баллы за оценку и пример суммируются

(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.

(б) Если записана оценка — 5 баллов.

(в) Если записана оценка, но не пояснено, почему 1×1 и 1×2 быть не могут — 3 балла.

(г) Если приведен пример разделения на 6 частей — 2 балла.

(д) Если решение неверное — 0 баллов.

3. Находясь на пересечении Длинного проспекта и 1-й Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта.

Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одной Поперечной улицы до Поперечной со следующим номером) за 9 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром на перекрёстке Длинного проспекта и 51-й Поперечной улицы, где находится её любимое кафе. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно), а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение? **Ответ:** Не сможет.

Решение. Чтобы дойти до перекрёстка проспекта и 51-й улицы, Александр потратит чётное число минут (ему нужно пройти 50 кварталов). Динара тратит чётное число минут на прохождение каждого квартала, но ей ещё надо нечётное число раз перейти улицу, чтобы оказаться на противоположной стороне. Значит, Динаре нужно нечётное число минут, чтобы оказаться на перекрёстке с той же стороны проспекта, что и Александр. Таким образом, встретиться они в указанной точке не смогут.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Соня поставила в каждую из клеток квадрата 3×3 рыцаря или лжеца (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Оказалось, что на доске есть как рыцари, так и лжецы, причём каждый из 9 людей может сказать фразу: «Больше половины моих соседей по стороне — рыцари!». Сколько рыцарей на доске?

Ответ: 6 рыцарей.

Решение. Заметим, что если в углу стоит рыцарь, то в обоих соседних клетках тоже рыцари. Обратно: если в середине стороны стоит лжец, то оба его соседа, стоящих в углах, лжецы.

Теперь рассмотрим всевозможные варианты того, кем оказались люди в серединах сторон.

Вариант 1. Все люди, стоящие в серединах сторон — рыцари. Тогда во всех углах тоже рыцари, и в центре тоже должен быть рыцарь. Но тогда на доске нет ни одного лжеца.

Вариант 2. Ровно один человек в середине стороны — лжец. Пусть для определённости он находится в верхней строке. Тогда в верхней строке должны быть три лжеца. С другой стороны, углы нижней строки окружены рыцарями, а значит, в этих углах могут стоять только рыцари. Наконец, центральную клетку окружают три рыцаря и лжец, а значит, в ней стоит рыцарь.

Вариант 3. Хотя бы два человека в серединах смежных сторон (пусть это верхняя строка и правый столбец) — лжецы. Тогда вся верхняя строка и весь правый столбец состоит из лжецов. А значит, и в центральной клетке должен стоять лжец (среди его соседей уже есть два лжеца). А тогда и в середине нижней строки и левого столбца также стоят лжецы (у них уже два соседа лжецы). Оставшийся человек тоже должен быть лжецом. Но тогда нет ни одного рыцаря.

Вариант 4. В серединах сторон тоже есть два лжеца, но они на противоположных сторонах (допустим, сверху и снизу). Тогда в верхней и нижней строках исключительно лжецы. Но тогда и в остальных клетках должны быть лжецы, ибо каждая из них уже окружена двумя лжецами — вновь все оказались лжецами.

Итак, в единственном возможном способе (вариант 2) 6 рыцарей.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Если забыт 1 случай при переборе ИЛИ забыто, что не могут быть все рыцари — 5 баллов.

• Рассмотрены только ситуации «рыцарь в углу и лжец в середине стороны» ИЛИ потеряно более 1 случая при переборе — 3 балла.

• Приведен только один пример и верный ответ — 0 баллов.

• Если решение неверное — 0 баллов.

5. Дано число $n < 100$. Известно, что числа от 1 до n разбиваются на пары, в которых одно число делится на другое. При каком максимальном n это возможно?

Ответ: $n = 10$.

Решение. При $n = 10$ разбиение на пары такое: 1-7, 2-6, 3-9, 4-8, 5-10.
Докажем, что при $n > 10$ требование задачи выполнить невозможно. Очевидно, n должно быть чётным (иначе числа не разобьются на пары). Если $n \geqslant 11$, то рассмотрим числа 7 и 11 — это простые числа, большие $n/2$, но меньшие n. Одно из них может быть в паре с 1, а второе должно быть в паре с числом, ему кратным. Значит, в этом случае $n \geqslant 14$ (это наименьшее число, кратное 7 или 11 и не равное им). Но если $n \geqslant 14$, то появляются аналогичные пары 11 и 13, после чего $n \geqslant 22$. Но в этом случае появляются аналогичные пары — 17 и 19, после чего $n \geqslant 34$. Далее подойдут пары 29 и 31 (тогда $n \geqslant 58$), пары 43 и 53 (тогда $n \geqslant 86$), пары 79 и 83, и тогда $n > 100$, чего не должно быть по условию задачи.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Приведена идея о том, что простых числа, больших половины n, не должно быть более одного — 5 баллов.

• Есть незначительные ошибки в оценке или недостаточное объяснение и дан верный ответ — 5 баллов.

• Приведен верный ответ и пример разбиения на пары — 2 балла.

• Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
6 класс

Решения

1. Петя умеет делать с числами две операции:
(а) увеличивать число на 18;
(б) вписывать цифру 8 между двумя любыми цифрами.
Как ему из числа 18 получить число 181716? Достаточно привести один способ.

Решение. Например, нужно три раза вставить 8 (получится число 18888), а затем 9046 раз прибавлять 18.
Есть и другие варианты, но ключевой момент — восьмёрку необходимо вставлять ровно три раза. В самом деле, прибавление 18 не меняет остатка при делении на 9. А если вставить 8, то остаток уменьшится на 1 по признаку делимости на 9 (если остаток был нулевой, то остаток полученного числа будет равен 8). А нам нужно получить из нулевого остатка остаток 6.

Критерии. Верный способ — 7 баллов.
В способе есть ошибка, но легко доделывается — 4 балла.

2. В классе 12 человек, каждый дружит с шестью другими. Они провели турнир по теннису, в котором каждый сыграл с каждым по разу. Ничьих в теннисе не бывает. Докажите, что кто-то из детей одержал больше побед над друзьями, чем над остальными ребятами.

Решение. Допустим противное. Пусть у каждого человека побед над друзьями не больше, чем побед над недругами. Тогда и всего количество побед друга над другом не больше, чем количество побед недруга над недругом. Но первое количество — это количество пар друзей (а это $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36$), потому что в каждой паре друзей один выиграл у другого. А вторая сумма — количество пар недругов (а это $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$), и мы пришли к противоречию.

Критерии. Всё сделано верно — 7 баллов.
Есть арифметическая ошибка — минус 2 балла.

3. В ряд написано несколько натуральных чисел (больше двух), самое левое из них равно сумме всех остальных. Некоторые из чисел увеличили на 10, а остальные уменьшили на 10. Снова получился ряд из натуральных чисел, но теперь самое правое число равно сумме остальных. Сколько чисел могло быть написано?

Ответ: 3 числа.

Решение. Пусть изначально выписаны числа: x, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, y.
Тогда по условию $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + y.$, то есть $x - y = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
После изменения чисел на 10 получили на доске: $x \pm 10$, b_1, b_2, $\ldots$, b_n, $y \pm 10$.
Тогда аналогично первому случаю получаем: $y \pm 10 - (x \pm 10) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.
Сумма b_1, b_2, $\ldots$, b_n принимает наибольшее значение, если в левой части равенства после раскрытия скобок обе десятки со знаком $+$. Это можно записать так:

$$y - x + 20 \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Складывая результирующее равенство первого случая, со вторым неравенством, получаем:

$$x - y + (y - x + 20) \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

$$20 \geqslant (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n).$$

В сумме $a_i + b_i$ два натуральных слагаемых, отличающихся на 10. Значит, $a_i + b_i \geqslant 12$. Следовательно, $n \leqslant 1$, и в последовательности ровно три числа.
Такая последовательность из трех чисел существует:

$$16,\ 15,\ 1.$$

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 4 балла.

4. Вдоль кольцевой дороги длиной 200 км через каждый километр стоят столбы. У некоторых столбов стоит по инспектору (а больше инспекторов нет). При этом на расстоянии ровно 2 км от любого столба есть как инспектор, так и столб без инспектора. Инспектор расслаблен, если и ровно в километре от него, и ровно в трёх километрах от него есть другой инспектор. Сколько всего расслабленных инспекторов?

Ответ: 50.

Решение. Покрасим столбы без инспекторов в белый цвет, а с инспекторами — в черный. Заметим, что любые два столба на расстоянии 4 км — разноцветные (это два столба на расстоянии 2 км от столба ровно посередине между ними). Поэтому любые два столба на расстоянии 8 км — одноцветные, то есть раскраска столбов повторяется через 8.
Рассмотрим два черных столба на расстоянии 2 км. Если между ними стоит черный столб (а в двух километрах от него стоит еще один), то мы находим четыре подряд черных столба, значит, следом за ними идут четыре подряд белых столба, а далее раскраска повторяется (всего 25 белых и 25 черных четверок). В каждой четверке два средних инспектора не расслаблены (в трех километрах от них никого нет), а два крайних расслаблены, всего получаем $2 \cdot 25 = 50$ расслабленных инспекторов.
Пусть между черными столбами на расстоянии 2 км стоит белый столб (а в 2 км от него с какой то стороны есть черный). Получаем четверку ЧБЧЧ, за ней следует «противоположная» четверка: ЧБЧЧБЧББ и далее раскраска повторяется (25 таких восьмерок по кругу). Видим, что в каждой такой восьмерке два средних инспектора расслаблены, а два крайних — нет (соседние с ними столбы — белые), значит, снова получается $2 \cdot 25 = 50$ расслабленных инспекторов.

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 3 балла.

5. Некоторые из натуральных чисел от 1 до 12 000 000 разбили на пары так, что в каждой паре одно из чисел делится на другое. Докажите, что не менее миллиона чисел остались без пары.

Решение. Отметим среди указанных чисел все нечетные числа, большие 6 000 000 — их ровно 3 000 000. На них не делятся никакие другие наши числа (кратные им числа превышают $2 \cdot 6\,000\,000 = 12\,000\,000$), значит, парное к любому отмеченному числу должно быть его делителем и отличаться от него минимум в три раза (в два не может в силу нечетности отмеченных). Значит, любое число, стоящее в паре с каким то из отмеченных, не превосходит $\frac{12\,000\,000}{3} = 4\,000\,000$ и, очевидно, нечетно. Таких чисел ровно 2 000 000, значит, как минимум $3\,000\,000 - 2\,000\,000 = 1\,000\,000$ отмеченных чисел остались без пары.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
7 класс

ЮМШ

Решения

1. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, …, 8, каждое покрашено в красный цвет. За один шаг Алина может выбрать три различных числа такие, что сумма двух из них равна третьему, и поменять у этих трёх чисел цвет (с красного на синий и наоборот). Алина хочет сделать все числа синими. Помогите Алине осуществить желаемое.

Решение. Перекрасим тройки $(1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (1, 7, 8)$. Тогда каждое число поменяло цвет нечётное число раз, то есть стало синим.

Критерии. Все сделано верно — 7 баллов.

2. В 7 классе учится восемь школьников разного роста. Учитель хочет расставить всех учеников в ряд так, чтобы для каждого ученика было выполнено хотя бы одно из условий:
- справа и слева от этого ученика поровну школьников выше его;
- справа и слева от этого ученика поровну школьников ниже его.

Докажите, что у учителя есть ровно два способа так расставить учеников.

Решение. Пронумеруем школьников от 1 до 8 в порядке возрастания роста. Рассмотрим самого левого школьника. Слева от него ноль школьников выше и ниже его. Значит, это школьник с номером 1 или 8. Аналогично самый правый школьник имеет номер 1 или 8. Разберём случай, когда школьник с номером 1 стоит слева, а с номером 8 — справа. Рассмотрим второго школьника слева. Слева от него нет школьника выше, а справа есть хотя бы один (школьник с номером 8). Значит, слева и справа от него должно быть поровну школьников ниже его. Слева от него такой школьник только один, а значит, и справа. То есть второй школьник слева имеет номер 3. Аналогично второй школьник справа имеет номер 6. То есть расстановка имеет такой вид: $1\,3\,a\,b\,c\,d\,6\,8$.
Если $a = 2$, то слева и справа от него будет разное число школьников ниже его и разное число школьников выше его. Значит, $a \geqslant 4$. Слева от a нет школьника выше, а справа есть хотя бы один (школьник с номером 8). Значит, слева и справа от него должно быть поровну школьников ниже его. То есть по два школьника. Значит, $a = 5$. Аналогично доказывается, что $d = 4$. Тогда возможна одна из двух расстановок: $1\,3\,5\,2\,7\,4\,6\,8$ и $1\,3\,5\,7\,2\,4\,6\,8$. В первой расстановке не соблюдается условие для числа 2, а вторая подходит под условие. Значит, в этом случае возможно только одна расстановка.
В случае, когда школьник с номером 1 стоит справа, а с номером 8 — слева, аналогично возможна только одна расстановка. Значит, всего расстановок, подходящих под условие, две.

Критерии. Доказано, что самый низкий и самый высокий стоят по краям — 1 балл.
Найдены итоговые варианты — 1 балл.

3. Федя выписал на доску 10-значное число-палиндром, в записи которого нет нулей. Серёжа перебрал все способы вычеркнуть 8 цифр из выписанного числа и сложил все 45 полученных двухзначных чисел. Могла ли полученная сумма оказаться простым числом? Напомним, что число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо.

Ответ: Нет.

Решение. Пусть наше число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$, где $a_1 = a_{10}$, $a_2 = a_9$, $a_3 = a_8$, $a_4 = a_7$, $a_5 = a_6$. Заметим, что числа $\overline{a_1a_{10}}, \overline{a_2a_9}, \overline{a_3a_8}, \overline{a_4a_7}, \overline{a_5a_6}$ делятся на 11, так как в них обе цифры равны. Все остальные получающиеся двухзначные числа разбиваются на пары $\overline{a_ia_j}$ и $\overline{a_{11-j}a_{11-i}}$. Например, числу $\overline{a_1a_2}$ сопоставлено число $\overline{a_9a_{10}}$, а числу $\overline{a_2a_7}$ сопоставлено число $\overline{a_4a_9}$. Заметим, что в каждой паре сумма чисел делится на 11. Действительно, $\overline{a_ia_j}+\overline{a_{11-j}a_{11-i}} = 10a_i+a_j+10a_{11-j}+a_{11-i} = 11a_i+11a_j$. Значит, сумма всех рассматриваемых двухзначных чисел делится на 11 и больше 11. Значит, она не может быть простым числом.

Критерии.

(а) Забыты числа a_ia_{11-i} — дыра в 2 балла.

(б) Арифметическая ошибка, но идея верная — 6 баллов.

4. Даны натуральные числа $p > 1$ и q. Обязательно ли найдутся различные неотрицательные целые числа a, b, c, d такие, что

$$\left(\frac{p}{q}+a\right)\left(\frac{p}{q}+b\right) = \left(\frac{p}{q}+c\right)\left(\frac{p}{q}+d\right)?$$

Ответ: да.

Решение. Положим $a = 0$, $b = p + q + 1$, $c = 1$, $d = p$. Так как $p > 1$, то все эти числа различные. Тогда левая часть равна

$$\left(\frac{p}{q}+a\right)\left(\frac{p}{q}+b\right) = \left(\frac{p}{q}+0\right)\left(\frac{p}{q}+p+q+1\right) = \frac{p(p+pq+q^2+q)}{q^2} = \frac{p^2+p^2q+q^2p+pq}{q^2},$$

а правая часть

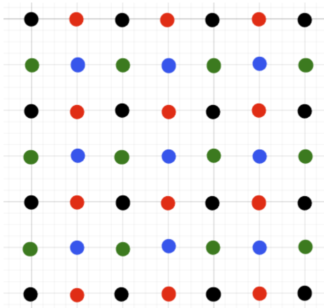
$$\left(\frac{p}{q}+c\right)\left(\frac{p}{q}+d\right) = \left(\frac{p}{q}+1\right)\left(\frac{p}{q}+p\right) = \frac{(p+q)(p+pq)}{q^2} = \frac{p^2+p^2q+qp+q^2p}{q^2}.$$

Два полученных выражения равны, что и требовалось доказать.

Критерии. Если пример имеет одинаковые числа, но можно без труда поправить на верный — 6 баллов.

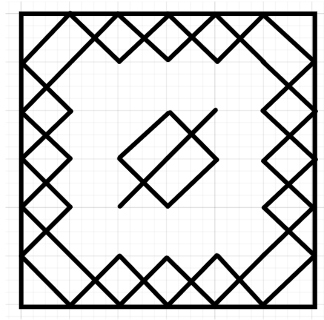
5. В каждой клетке квадрата 6×6 разрешается провести ноль, одну или две диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести так, чтобы никакие три из них не имели общей точки?

Ответ: 42.



Решение. Покрасим вершины клеток в 4 цвета, как показано на рисунке. Тогда диагонали бывают двух типов: те, которые соединяют вершины чёрного и синего цветов и те, которые соединяют вершины цветов красного и зелёного. По условию в каждой вершине синего и зелёного цветов сходится не больше двух диагоналей, причём вершин синего цвета 9 штук, а зелёного — 12 штук. Значит, диагоналей не больше $2 \cdot (9 + 12) = 42$.

Пример изображен на картинке справа.
То есть ответ 42.



Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 3 балла.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
8 класс

Решения

1. Андрей выписал подряд все числа от 1 до n без пробелов: 123456789101112.... При каком наименьшем n полученное число делится на все числа от 1 до 5?

Ответ: 20.

Решение. Последняя цифра должна быть, очевидно, 0 (число должно делиться на 2 и на 5). Число 12345678910 не подойдёт (оно не делится ни на 4, ни на 3), а число 1234567891011121314151617181920 подходит.

Критерии.
Доказано, что на конце 0, — 2 балла
Показано, что числа меньше нашего не подходят — 3 балла.
Арифметическая ошибка — минус 2 балла.
Ответ — 1 балл.

2. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 2 очка, за победу — 3 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 4 очка. Четыре команды набрали 13, 9, 9 и 5 очков. Сколько очков набрала пятая команда?

Ответ: 0.

Решение. Если бы все победы были блестящими, то в каждой игре разыгрывалось бы по 4 очка, а тогда пять команд вместе бы набрали 40 очков. Но если бы все победы были блестящими, то каждая команда набрала бы чётное число очков, т. е. четыре команды с известным количеством очков набрали бы как минимум 14, 10, 10 и 6 очков — это уже 40 очков. Значит, пятая команда все матчи проиграла и набрала 0 очков.

Критерии.
(а) Если приведено полное решение — 7 баллов.
(б) Если найдено максимальное количество очков — 1 балл.
(в) Приведён только пример — 1 балл.

3. Треугольник PQR таков, что $\angle Q = 2\angle R$. В нём проведены биссектрисы PV и QU, пересекающиеся в точке I. На продолжении PQ за точку Q отмечена точка X, такая что $QI = QX$. Докажите, что прямая VX параллельна IQ.

Решение. Треугольник PIQ подобен треугольнику PVR по двум углам, поэтому их соответствующие внешние углы равны: $\angle QIV = \angle QVI$. Следовательно, $QV = QI$. Так как $QI = QX$, то треугольник XQV равнобедренный. А значит, $\angle QXV = \frac{1}{2}\angle PQV = \angle PQI$, что и даёт нужную параллельность.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Решение неверное — 0 баллов.

4. Некоторые натуральные числа от 1 до $10^{10000000}$ разбили на пары так, что большее число в каждой паре делится на меньшее. Докажите, что не менее 5% всех чисел остались без пары.

Решение. Пусть $2n = 10^{10000000}$.

Отметим среди указанных чисел все нечетные числа, большие n — их ровно $n/2$. На них не делятся никакие другие наши числа (кратные им числа превышают $2n$), значит, парное к любому отмеченному числу должно быть его делителем и отличаться от него минимум в три раза (в два не может в силу нечетности отмеченных). Значит, любое число, стоящее в паре с каким то из отмеченных, не превосходит $2n/3$ и, очевидно, нечетно. Таких чисел не более $n/3 + 1$ (округлим в большую сторону), значит, как минимум $n/2 - n/3 - 1 = n/6 - 1$ отмеченных чисел остались без пары. Осталось заметить, что $n/6 - 1$ существенно больше, чем 5% от $2n$.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если есть мысли про нечетные больше половины — 1 балл.
- Если решение неверное — 0 баллов.

5. В каждой клетке квадрата 8×8 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее двух лжецов!» Докажите, что рыцарей не более 42.

Решение. Пусть лжецов всего k. Тогда клеток, соседних с ними, не более $4k$, и на них необходимо расставить $64 - k$ рыцарей. Обозначим за x количество пар «рыцарь – лжец», стоящих в соседних по стороне клетках.

Каждый из $64-k$ рыцарей является соседом не менее двух лжецов, поэтому $x \geqslant 128-2k$.

С другой стороны, у каждого лжеца не более четырёх соседей-рыцарей, поэтому $x \leqslant 4k$. Отсюда получаем неравенство $4k \geqslant 128 - 2k$, откуда $k \geqslant 128/6$, что с учётом целочисленности количества лжецов даёт $k \geqslant 22$, что нам и требовалось.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если допущена арифметическая ошибка — 5 баллов.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
9 класс

Решения

1. В каждой клетке квадрата 10×10 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее трёх рыцарей!» А сколько рыцарей могло быть в этом квадрате?

Ответ: 0.

Решение. Допустим, что рыцари на доске есть. Рассмотрим самого верхнего из них, а если таких несколько — самого левого из самых верхних. Для него высказывание «в клетках, соседних по стороне с моей, не менее трёх рыцарей» не может быть истинным. Противоречие.

2. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Через вершину A провели прямую, отсекающую треть площади восьмиугольника (вершина B попала в меньшую часть). Через какую сторону прошла прямая?

Ответ: DE.

Решение. Докажем, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна четверти площади $ABCDEFGH$. Пусть O — центр восьмиугольника. Заметим, что площадь $AOCB$ в точности равна четверти площади $ABCDEFGH$ по симметрии. Значит, достаточно доказать, что площадь AOC равна площади ADC, т.е. что $AC||OD$. В самом деле: $\angle COD = 45^\circ$ (это восьмая часть от 360°), $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle OCA = 45^\circ$, т. к. треугольник AOC — равнобедренный прямоугольный. Отсюда $AC||OD$, что и заканчивает доказательство утверждения.

Итак, площадь четырехугольника $ABCD$ равна четверти, а пятиугольника $ABCDE$ — половине площади правильного восьмиугольника (последнее следует из симметрии фигуры). Поэтому треть достигается для прямой, пересекающей сторону DE.

3. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни появятся. Докажите, что $p \geqslant 7$.

Решение. Поскольку исходный трёхчлен не имеет корней, то $p^2 - 4q < 0$. Но числа p, q целые, поэтому $p^2 - 4q \leqslant -1$. Но $(p + 0{,}1)^2 - 4(q + 0{,}1) \geqslant 0$, т. е. $(p^2 - 4q) + (0{,}2p - 0{,}39) \geqslant 0$, откуда $0{,}2p - 0{,}39 \geqslant 1$, т.е. $p \geqslant 6{,}95$. Так как p целое, получаем искомый результат.

4. Андрей написал в ряд несколько (не менее двух) подряд идущих трёхзначных чисел в порядке возрастания, получив одно большое число (например, 123124125). Оказалось, что полученное число делится на все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 398399400.

Решение. Если в ряд написано два подряд идущих числа (скажем, a и $a + 1$), то получившееся число имеет вид $1001a + 1$ и потому не делится на 7 (так как 1001 делится на 7).

Пусть теперь мы записываем подряд числа a, $a + 1$ и $a + 2$ и получаем число $1001001a+$ $+1002$, которое подходит по условию. Во-первых, это означает, что $a + 2$ делится на 5 и на 8 (т. е. делится на 40). Кроме того, $a + 1$ должно делиться на 3 ($1001001a + 1002$ сравнимо с $3a + 3$ по модулю 9 и в то же время должно делиться на 9), а ещё $a + 1$ должно делиться на 7 ($1001001a + 1002$ сравнимо с $a + 1$ по модулю 7), т.е. $a + 1$ должно делиться на 21. Итак, $a + 1$ как минимум делится на 21 и оканчивается на 9. Наименьшее такое число — это $21 \cdot 9 = 189$, оно не подходит, а следующее — $21 \cdot 19 = 399$ — подойдёт. Это и даёт ответ 398399400.

5. В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохлаждается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней?

Ответ: не могут.

Решение. Давайте выдавать карточку каждому человеку каждый раз, когда он был запасным.

Допустим, что какой-то игрок сидел на скамейке запасных не более трёх раз. За эти разы он мог познакомиться не более с 30 людьми, а должен был с 32. Значит, каждый был запасным не менее четырёх раз, а тогда выдано не менее $4 \cdot 33 = 132$ карточек.

Допустим теперь, что 11 дней хватит на то, чтобы клуб перезнакомился. За 11 дней будет выдана всего 121 карточка, что противоречит предыдущему абзацу.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
10 класс

Решения

1. Андрей, Борис, Виктор и Геннадий собирали ягоды. Оказалось, что Андрей с Борисом вместе набрали треть от того, что собрали Виктор и Геннадий вместе. Борис и Виктор собрали две трети от собранного Андреем и Геннадием вместе. А Андрей с Виктором — 7/13 от собранного Борисом и Геннадием. Какую долю ягод (от общего количества) собрал Андрей?

Ответ: 1/10.

Решение. Докажем общий факт. Пусть $\frac{a+b}{c+d}=x$. Тогда $\frac{c+d}{a+b}=\frac{1}{x}$, то есть $\frac{a+b+c+d}{a+b}=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$. Тогда $\frac{a+b}{a+b+c+d}=\frac{x}{x+1}$.

Пусть a, b, c, d — количество ягод, собранных Андреем, Борисом, Виктором и Геннадием соответственно. Тогда $\frac{a+b}{a+b+c+d}=\frac{1}{4}$, $\frac{b+c}{a+b+c+d}=\frac{2}{5}$ (и значит, $\frac{a+d}{a+b+c+d}=\frac{3}{5}$), а также $\frac{a+c}{a+b+c+d}=\frac{7}{20}$. Складывая полученные равенства, имеем

$$\frac{3a+b+c+d}{a+b+c+d}=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{20}=\frac{24}{20}.$$

Тогда $\frac{2a}{a+b+c+d}=\frac{4}{20}$, откуда и следует ответ.

Критерии.

Правильное решение — 7 баллов.

Арифметическая ошибка в конце — снимается 5 баллов.

Только ответ — 0 баллов.

2. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 3 очка, за победу — 4 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 6 очков. Четыре команды набрали 19, 13, 13 и 7 очков. Сколько очков набрала пятая команда?

Ответ: 0.

Решение. Если бы все победы были блестящими, то в каждой игре разыгрывалось бы по 6 очков, а тогда пять команд вместе бы набрали 60 очков. Но если бы все победы были блестящими, то количество очков у каждой команды делилось бы на 3, т. е. четыре команды с известным количеством очков набрали бы как минимум 21, 15, 15 и 9 очков — это уже 60 очков. Значит, пятая команда все матчи проиграла и набрала 0 очков.

Критерии. правильное решение — 7 баллов

Просто пример игр — 3 балла

Перебор случаев без нормального обоснования разбиений — 5 баллов.

3. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни (хотя бы один) появятся. Найдите наименьшее возможное значение p.

Ответ: 17.

Решение. Пример: трёхчлен $x^2 + 17x + 73$ не имеет корней (потому что $17^2 - 4 \cdot 73 = -3$), но $17{,}1^2 - 4 \cdot 73{,}1 = 0{,}01 > 0$.

Поскольку исходный трёхчлен не имеет корней, то $p^2 - 4q < 0$. Но числа p, q целые, поэтому $p^2 - 4q \leqslant -1$. Заметим, что равенства $p^2 - 4q = -1$ и $p^2 - 4q = -2$ выполняться не могут, так как квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 по модулю 4.

После прибавления имеем $(p + 0{,}1)^2 - 4(q + 0{,}1) \geqslant 0$, т.е. $(p^2 - 4q) + (0{,}2p - 0{,}39) \geqslant 0$, откуда $0{,}2p - 0,39 \geqslant 3$, т.е. $p \geqslant 16{,}95$. Так как p целое, получаем искомую оценку.

Критерии. Решена задача с 1,1 — 1 балл.

Просто оценка из $0{,}2p - 0{,}39$ — 0 баллов.

Перебор случаев значения дискриминанта, разобраны при этом только минимальные значения оценки — 3 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Решение верное, но не доказано, что 17 подходит, только оценка — минус 2 балла.

При этом понятно, как строить q — минус 1 балл.

Доказано, что $p \geqslant 7$ — 0 баллов.

4. Дан равносторонний треугольник ABC. Пусть M — середина отрезка BC. Точка D симметрична точке A относительно точки B, а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую MD. Докажите, что K лежит на вписанной окружности треугольника ABC.

Решение 1. Пусть E — точка, симметричная D относительно M, N — середина AC, L — середина AB. Тогда $BDCE$ — параллелограмм, в частности, отрезок CE равен и параллелен $BD = AB$, то есть ACE — правильный треугольник и, в частности, EN перпендикулярен CN. Значит, четырехугольник $ENKC$ — вписанный (в окружность с диаметром CE), а тогда $\angle NKE = \angle NCE = \frac{\pi}{3}$. Поэтому $\angle NKM = \frac{2\pi}{3} = \pi - \angle MLN$, то есть четырехугольник $MLNK$ — вписанный, то есть K лежит на описанной окружности треугольника LMN — она же вписанная окружность треугольника ABC.

Решение 2. Пусть O — центр треугольника, X — середина AO, она же точка пересечения прямой AM со вписанной окружностью (так как $2 \cdot OM = AO$). Достаточно доказать перпендикулярность CX и MD — тогда их точка пересечения совпадет с K и попадет на окружность (угол MKX — прямой и опирается на диаметр).

Это можно сделать так. Заметим, что угол ACD прямой, треугольники DBC и AOC подобны (равнобедренные с углом $\frac{2\pi}{3}$ при вершине), значит, подобны и отсекаемые от них медианами треугольники AXC и CMD. Поэтому $\angle ACX = \angle CDM = \frac{\pi}{2} - \angle MPC$, где P — точка пересечения прямых DM и AC. Значит, CX перпендикулярна MD.

Комментарий: вычисление степеней точек D, M (они равны 3 и $\frac{1}{4}$, если принять $AB = 1$) показывает, что MD — радикальная ось точки C и описанной окружности треугольника AOL (с центром в X), что также дает искомую перпендикулярность.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Арифметические ошибки при счете — 5 баллов.
- Неполный счет или неверное решение — 0 баллов.

5. На доске написаны десять натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Аня составляет из них все возможные пары из них и для каждой пары a_i, a_j пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеют числа a_i и a_j — таким образом, у Ани на листочке написано 45 чисел. Боря берёт всевозможные тройки чисел a_i, a_j и a_k и пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеет эта тройка — таким образом, Боря записал 120 чисел. Оказалось, что все Борины числа больше 1, а среди Аниных хотя бы 20 являются простыми. Докажите, что хотя бы 20 Бориных чисел также являются простыми.

Решение. Для начала докажем следующую лемму.

Лемма. Если количество делителей числа x является простым, то x — степени простого числа.

Доказательство леммы. Пусть $x = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k}$. Тогда количество делителей равно $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots (b_k + 1)$. Если это число простое, то $k = 1$.

Тройку (a_i, a_j, a_k) назовём хорошей, если НОД(a_i, a_j, a_k) имеет простое количество делителей. Докажем, что хотя бы 20 троек является хорошими (это и требуется по условию задачи).

Построим граф: его вершинами будут числа a_i (десять вершин), а ребро между a_i и a_j проведём, если НОД(a_i, a_j) имеет простое количество делителей.

Докажем, что если есть рёбра $a_i a_j$ и $a_i a_k$, то тройка (a_i, a_j, a_k) хорошая. Из леммы следует, что НОД$(a_i, a_j) = p^\alpha$, НОД$(a_i, a_k) = q^\beta$. Так как НОД$(a_i, a_j, a_k) > 1$, то $p = q$, а тогда НОД$(a_i, a_j, a_k) = p^{\min \alpha, \beta}$. Осталось заметить, что числа $\alpha - 1$ и $\beta - 1$ простые.

Докажем, что в полученном графе имеется не менее 20 «галочек» (т.е. пар рёбер с одной общей вершиной). Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ — степени вершин графа. Найдём минимальное количество галочек. По условию $b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 40$ (т.к. рёбер 20, а мы считаем сумму степеней вершин). Количество «галочек» оценивается как

$$\frac{b_1(b_1 - 1)}{2} + \frac{b_2(b_2 - 1)}{2} + \ldots + \frac{b_{10}(b_{10} - 1)}{2} = \frac{1}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{10}^2 - 40\right)$$

(для каждой вершины выберем пару исходящих из неё рёбер). Если сумма чисел фиксированна, то сумма их квадратов принимает наименьшее значение при равных числах, поэтому количество галочек не менее чем $10 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 60$. Каждая галочка порождает хорошую тройку, а каждая хорошая тройка может быть порождена максимум тремя галочками, а значит, хороших троек не менее 20.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Доказано, что все НОД Ани — это степени простых — 4 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
15 сентября 2024 года
11 класс

Решения

1. У Андрея есть две кучки с гирями. В одной кучке неограниченное количество гирь по 1 г, в другой — сто гирь по $\sqrt{n}$ г. Андрей знает, что n — натуральное число, не превосходящее 2024, но не знает, чему оно равно. Всегда ли он сможет при помощи чашечных весов определить, чему равно n?

Ответ: Всегда.

Решение. Взвесим все сто монет $\sqrt{n}$ и посмотрим, в промежутке между какими целыми числами находится число $100 \cdot \sqrt{n}$. Утверждается, что все эти числа попадают в разные промежутки, потому что при $n > k$ $100(\sqrt{n} - \sqrt{k}) > 1$.

В самом деле, $100(\sqrt{n} - \sqrt{k}) = \dfrac{100}{\sqrt{n} + \sqrt{k}} > \frac{100}{2\sqrt{n}} > 1$, так как $n < 2024$

(на самом деле нам нужно более слабое условие $n < 2500$).

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Если сказано, что все числа вида $100 \cdot \sqrt{n}$ лежат в различных промежутках, без доказательства — 4 балла.

• Если сказано, что для любых двух чисел a и b существует такое число m, что $m(\sqrt{(}a - \sqrt{b}) > 1$, без доказательства — 1 балл.

2. На доске написаны 10 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Андрей выписал количество делителей у $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и получил десять подряд идущих чисел. Никита выписал количество общих делителей у a_1 и a_2, у a_1 и a_3, …, у a_9 и a_{10} (всего 45 таких пар) и получил 45 различных степеней двоек. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение. Заметим, что ровно половина чисел a_i являются точными квадратами, т. к. у них нечётное число делителей. Но тогда их попарные НОДы (которых 10) также должны быть точными квадратами, и значит, десять попарных НОДов должны иметь нечётное число делителей. Но среди различных степеней двойки такое число максимум одно. Противоречие.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Если сказано, что среди a_i ровно половина — точные квадраты — 2 балла.

• Если сказано, что количество общих делителей точных квадратов нечетно — 3 балла.

• Если сказано, что количество общих делителей пар точных квадратов нечетно, но не сказано, почему это противоречит условию — 1 балл.

3. В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохлаждается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней?

Ответ: не могут.

Решение. Давайте выдавать карточку каждому человеку каждый раз, когда он был запасным.

Допустим, что какой-то игрок сидел на скамейке запасных не более трёх раз. За эти разы он мог познакомиться не более с 30 людьми, а должен был с 32. Значит, каждый был запасным не менее четырёх раз, а тогда выдано не менее $4 \cdot 33 = 132$ карточек.

Допустим теперь, что 11 дней хватит на то, чтобы клуб перезнакомился. За 11 дней будет выдана всего 121 карточка, что противоречит предыдущему абзацу.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если доказано, что каждый игрок был на скамейке запасных не менее 4 раз, — 4 балла.
- Если решение неверное — 0 баллов.

4. На кривой $xy = 1$ $(x > 0, y > 0)$ даны две точки A и B. Касательные к кривой в точках A и B пересекаются в точке F. Пусть M — середина отрезка AB, O — начало координат. Докажите, что $\dfrac{MO \cdot MF}{MA \cdot MB}$ не зависит от точек A и B.

Решение 1. Сосчитаем в координатах. Нам даны точки $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$, $M(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2ab})$ (координаты M — среднее арифметическое координат A и B).

Напишем уравнение касательной в точке A: $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$ ($\frac{-1}{a^2}$ — производная функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = a$). Или: $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$.

Аналогично касательная в B имеет уравнение $y = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$.

Найдём координаты точки F.

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b};$$

$$x\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{b} - \frac{2}{a};$$

$$\frac{x(a-b)(a+b)}{a^2b^2} = \frac{2(a-b)}{a+b};$$

$$x_F = \frac{2ab}{a+b}.$$

Отсюда $y_F = -\frac{2b}{a(a+b)} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a+b}$.

Теперь сосчитаем $(MO \cdot MF)^2$:

$$(MO \cdot MF)^2 = \left(\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4a^2b^2}\right)\left(\left(\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4}\left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right)\left(\left(\frac{(a-b)^2}{2(a+b)^2}\right)^2 + \left(\frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)}\right)^2\right) = \frac{(a-b)^4}{16}\left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right)^2.$$

Докажем, что эта величина пропорциональна AB^4 (это равносильно исходной задаче, ибо $AM \cdot BM = \frac{1}{4}AB^2$).

$$AB^4 = \left((a-b)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2\right)^2 = \left((a-b)^2 + \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2\right)^2 = (a-b)^4\left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right)^2.$$

Утверждение доказано.

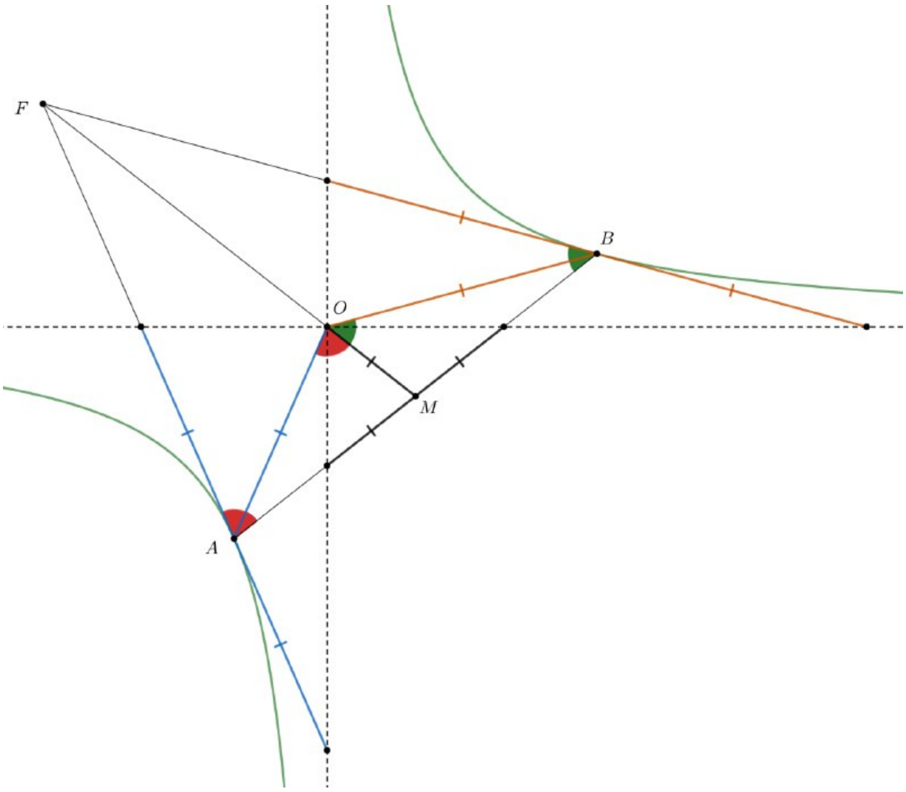


Рис. 1: К заданию 4

Решение 2. Приведем набросок более геометрического решения.

Лемма: координатные оси высекают на прямой AB отрезок с серединой в точке M. Доказательство: прямая AB задается уравнением $y = -\frac{x}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Поэтому AB пересекает оси в точках $(0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ и $(a+b, 0)$, из чего сразу следует утверждение леммы.

Вернемся к задаче. Отметим точку F' на луче MO такую, что $MO \cdot MF' = MB^2$. Тогда, $\angle F'AM = \angle MOA$ и $\angle F'BM = \angle MOB$. Поэтому достаточно проверить аналогичные равенства углов с F вместо F'. Применяя лемму три раза, получим черные, синие и оранжевые равенства отрезков (пользуясь фактом, что в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы). Дальше простой счет углов.

Критерии.

- Если приведено полное решение — 7 баллов.
- Если счет в координатах не сошелся — 0 баллов.
- Если сформулирована лемма из решения 2 — 1 балл.
- Если лемма сформулирована и доказана — 3 балла.

5. Многочлен f таков, что уравнение $f(f(x)) \cdot f(x) = a$ имеет ровно три решения при любом натуральном a от 1 до 40. Докажите, что степень f не менее 6.

Решение. Пусть $\deg(f) = n$ (где deg — степень многочлена), и пусть $g(x) = f(f(x)) \cdot f(x)$. Тогда $\deg(g) = n^2 + n$, что всегда является чётным числом. Докажем, что уравнение $g(x) = a$ имеет нечётное число решений тогда и только тогда, когда прямая $y = a$ проходит через какую-нибудь точку экстремума (минимума или максимума) многочлена g. В самом деле, так как $\deg(g)$ чётна, то существует такое $N > 0$, что $g(x) > a$ при всех $|x| > N$. Значит, пересечений графика $y = g(x)$ с прямой $y = a$ на промежутках убывания g должно быть столько же, сколько и на промежутках возрастания. Но если общее количество таких точек пересечения нечётно, то хотя бы одна точка пересечения должна находиться на границе какого-то промежутка монотонности g, т. е. являться экстремумом.

Осталось заметить, что у многочлена степени k не может быть более $k-1$ экстремума (например, потому что экстремум многочлена должен являться корнем производной, а она является многочленом степени $k-1$), а значит, $n^2+n-1 \geqslant 40$, откуда и получаем $n \geqslant 6$.

Критерии.

• Если приведено полное решение — 7 баллов.

• Если доказано, что прямая $y=a$ имеет нечетное число пересечений с графиком $g(x)$ только тогда, когда она проходит через экстремум — 4 балла.

• Если доказано, что многочлен степени k имеет не более $k-1$ экстремума — 1 балл.