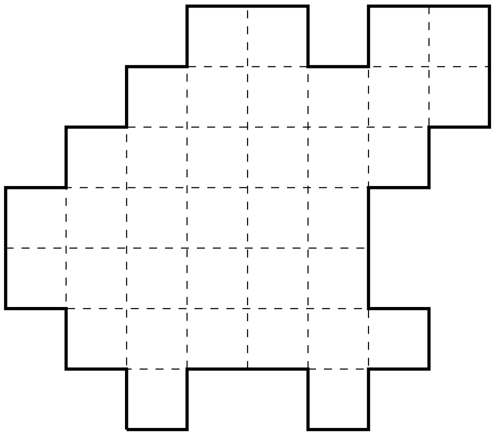
Содержание

Условия первого отборочного тура

4 класс

1. Разрежьте фигурку на рисунке на четыре равные части.



2. Пасмурным летним днём состоялся дружеский матч между командами рыцарей и лжецов (первые всегда говорят правду, вторые — всегда лгут). С каждой стороны участвовали двое. После игры прозвучали следующие высказывания (по одному высказыванию от каждого игрока):

1) У рыцарей 12 очков, а у лжецов — 11.
2) У рыцарей 11 очков, а у лжецов — 12.
3) Рыцари победили.
4) Мы бы сыграли лучше, если бы нас не слепило солнце!

С каким счётом закончился матч?

3. В одном из классов интересной спортшколы учится 30 ребят. Из них кёрлингом занимаются 7, бобслеем — 9, 8 — хоббихорсингом (из которых двое — только им). Трое ходят на тренировки и по бобслею, и по кёрлингу одновременно. Пятеро — одновременно на бобслей и хоббихорсинг. Все остальные всё время уделяют черлидингу.

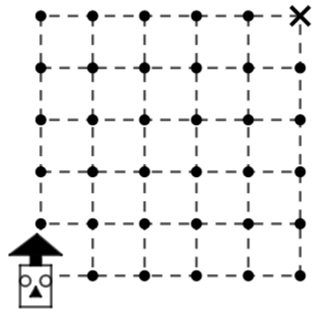
Сколько существует вариантов отправить на соревнования команду из спортсмена, который занимается хотя бы двумя видами спорта и черлидера?

4. Вася и Петя задумали по пятизначному числу без повторяющихся цифр, причем разность между любыми соседними цифрами в их числах не меньше 7. У Пети получилось наибольшее возможное из таких чисел, а у Васи — наименьшее. Чему равна сумма задуманных ими чисел?

5. Трем школьникам поручено шесть ночей наблюдать за звездным небом, причем за каждым школьником закреплен конкретный участок неба. У них есть два телескопа. Если смотреть через первый телескоп, то будет видно вдвое больше звёзд, чем невооружённым глазом, а если через второй, то втрое больше. Каждую ночь двое школьников подходят к телескопам (а третий смотрит глазами), считают звёзды каждый на своём участке и складывают результаты. В понедельник ими было насчитано в сумме 2020 звёзд, во вторник — 2021, в среду — 2022, …, в субботу — 2025 звёзд. Новых звезд за это время не появлялось, и никакие звезды не исчезали. Докажите, что кто-то из школьников обсчитался.

5 класс

1. По узлам сетки квадрата 5×5 метров двигается робот. За секунду он может либо проехать на 1 метр вперёд, либо повернуться на $90°$ против часовой стрелки. Изначально робот находится в нижнем левом углу и смотрит наверх. За 13 секунд он смог добраться до правого верхнего угла. Сколькими способами робот мог это сделать?



2. Петя и Вася живут в одном подъезде 41-этажного дома. Вася зашел в подъезд и оказался на первом этаже. После чего он поднялся к себе домой, а затем спустился в гости к Пете. Оказалось, что он прошел в два раза больше лестничных пролетов, чем он прошел бы, если поднялся сразу к Пете. С другой стороны он прошел столько же лестничных пролетов, сколько бы он прошел, поднявшись сразу на последний этаж. На каком этаже живет Вася?

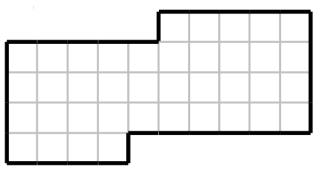
3. Рыбаки плотно расселись по берегу круглого пруда и начали удить рыбу. После того как была выловлена тысячная рыбина, они обнаружили, что каждый из них поймал столько карпов, сколько двое его соседей (слева и справа) вместе поймали щук. Водился ли в пруду ещё какой-либо вид рыб? Объясните свой ответ.

4. У Вари есть 27 карточек с двузначными числами (числа на карточках не повторяются). Докажите, что она может составить из двух своих карточек четырехзначное число, которое начинается и заканчивается одной и той же цифрой.

5. В горах 20 поселков, любые два соединены отдельной дорогой — канатной или железной, причем из каждого поселка выходит не менее восьми дорог каждого типа. Экскурсовод пытался составить маршрут, проходящий по всем поселкам по разу и не требующий смены транспорта. Оказалось, что это невозможно! Приведите пример, как такое могло быть (и объясните, почему в Вашем примере невозможно разработать требуемый маршрут).

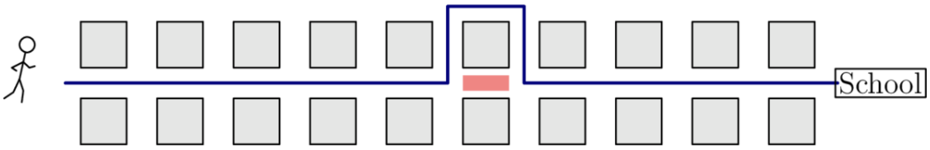
6 класс

1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



2. Серёжа каждый день идёт до школы пешком один километр. Его маршрут состоит из 10 городских кварталов одинаковой длины, каждый квартал Серёжа проходит за 1 минуту. Сегодня, пройдя 5 кварталов, Серёжа обнаружил, что ему придётся сделать крюк, пройдя

3 квартала вместо 1 квартала, чтобы добраться до следующего угла (как показано на рис.). Сколько метров в минуту должен проходить Серёжа на оставшемся пути, чтобы добраться до школы в свое обычное время?



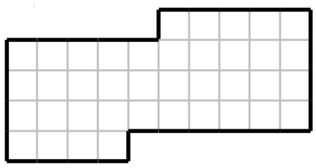
3. Петя и Вася играют на клетчатой полоске 1×100, по очереди расставляя в её клетки крестики и нолики (в каждой клетке не более одного символа, первым ходит Петя). За один ход Петя ставит один крестик, а Вася — один нолик. Может ли Вася играть так, чтобы ни в какой момент игры на доске не было три крестика «в ряд».

4. На доску выписаны пятнадцать чисел в порядке возрастания, разница между любыми двумя соседними числами одинакова. Петя не знает выписанных чисел, но знает, что первое число от 1 до 10, второе от 13 до 20, пятнадцатое от 241 до 250. Может ли Петя по имеющимся данным восстановить все числа?

5. На столе лежит куча из 533 маркеров. Каждую минуту Серёжа выбирает одну из куч с хотя бы четырьмя маркерами, убирает из неё один маркер и делит её на три новые кучи (не обязательно поровну). Могут ли через несколько минут остаться только кучи с двумя маркерами?

7 класс

1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



2. Десять игроков соревнуются в турнире. Каждый игрок играет ровно две игры с каждым игроком. За игру победитель получает 2 очка, проигравший — 0 очков, а в случае ничьей оба получают по 1 очку. Каково минимально возможное количество очков, которое игрок должен набрать, чтобы гарантировать себе победу в турнире (т.е. он имеет больше очков, чем любой другой игрок)?

3. Клетки квадрата 4×4 раскрасили в шахматном порядке. В каждую чёрную клетку записали число 0, а в каждую белую — 16. Затем с числами в квадрате четыре раза проделали следующую операцию. Для каждой клетки вычислили новое число, равное полусумме всех чисел, записанных в соседних по стороне клетках. После этого все числа стирали, а вместо них записывали эти новые вычисленные числа. Чему равна сумма всех чисел после четвёртой операции?

4. Константин Максимович закрасил на клетчатой бумаге 2023 квадратика так, что если закрашенную фигуру вырезать, то она не распадётся на части. Могло ли получиться так, что у каждой закрашенной клетки нечётное число закрашенных соседей по стороне?

5. Каждый житель острова рыцарей и лжецов является либо рыцарем и всегда говорит только правду, либо лжецом и всегда лжёт. 60 жителей этого острова собрались в круг.

Жители высказывались по очереди и каждый произнёс либо фразу «Следующие два говорящих человека за мной будут лжецами», либо фразу «предыдущий оратор являлся лжецом». Сколько в круге может быть лжецов?

8 класс

1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BC$, $ADC = 90°$, $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что на отрезке AB можно выбрать точку M так, что $ADCM$ будет прямоугольником.

2. Может ли старик Хоттабыч вместо a, b, c, d, e, f вписать в каком-то порядке 6 последовательных натуральных чисел в уравнения $y = a|x| + b$, $y = cx + d$, $|y| = ex + f$ так, чтобы существовала всего одна пара чисел (x, y), которая является решением ровно каких-то двух уравнений и не существовало таких пар (x, y), которые являются решением всех трех уравнений в совокупности?

3. На шахматной доске 8×8 Аладдин отметил клетки a8 и b7. Как джинну поставить на доску четырех ферзей на не отмеченные клетки, чтобы они держали под боем все остальные клетки доски, кроме отмеченных?

4. У взрослой гидры 3600 щупалец. Взрослую гидру можно разделить на две, у каждой должно быть ненулевое количество щупалец. Если гидра не взрослая, то у неё каждую секунду вырастает по щупальцу. У взрослой гидры щупальца не вырастают. Какое наибольшее количество взрослых гидр можно получить из одной взрослой особи за час?

5. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

9 класс

1. $ABCD$ — трапеция с основанием AD и $\angle BAD + \angle ADC \neq 120°$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно прямой CD, а точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно прямой AB. Докажите, что $A'B'C'D'$ — трапеция.

2. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q — натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

4. Вычислите

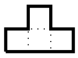
$$\left\lfloor \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \cdots + \frac{\lceil\sqrt{2022}\rceil}{\lfloor\sqrt{2022}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2023}\rceil}{\lfloor\sqrt{2023}\rfloor} \right\rfloor.$$

Здесь $\lceil x\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x, а $\lfloor x\rfloor$ — наибольшее целое число, не большее x.

5. Есть 10 тарелок, на 9 лежит по 100 блинов, одна пустует. Блины раскрашены в 9 цветов, каждого цвета по 100 блинов. Разрешается снять верхний блин с какой-либо тарелки, и переложить его на верх тарелки, где меньше 100 блинов. Всегда ли такими операциями можно сделать 9 стопок по 100 одноцветных блинов?

10 класс

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

2. Андрей написал в каждой клетке квадрата 4×4 число от 1 до 16 так, что все числа оказались написаны по одному разу. К квадрату подходит Лёня с четырёхклеточной фигурой (см. рис.) в руках. Лёня кладёт свою фигуру в квадрат так, чтобы сумма чисел в этой фигуре была максимально возможной (Лёня может поворачивать свою фигуру). Но Андрей хочет расставить числа так, чтобы сумма чисел в Лёниной фигуре была минимально возможной. Чему она будет равна? 

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

4. В турнире по футболу играли несколько команд. Каждые две команды сыграли один матч. За победу давали два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — ничего. После турнира выяснилось чем больше очков у команды, тем меньше голов она забила (суммарно за весь турнир) и тем больше голов пропустила. Какое наименьшее количество команд могло быть?

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

11 класс

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q — натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

2. Найдите количество функций $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ для которых верно $f(f(f(x))) = x$ для всех $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

4. Докажите, что для любого $x \in [0, 2]$ верно

$$2^x + 1 - \sqrt{10,5x + 4} \leqslant 0.$$

5. Сумма всех натуральных делителей числа n более чем в 100 раз превосходит само число n. Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.

Условия второго отборочного тура

4 класс

1. Варя придумала операцию «Омега». Если взять два числа и применить к ним «Омегу», то получится их произведение, уменьшенное на 3.

Варя задумала число и никому не сказала, какое. Она взяла число 3 и задуманное число, применила к ним «Омегу» и получила Результат. А потом взяла этот Результат и число 2, применила к ним «Омегу» и получила 15. Какое число задумала Варя?

2. У Малыша есть несколько кубиков с нарисованными числами на каждой из граней: один кубик с единицей на каждой грани, два кубика с двойкой на каждой грани, три кубика с тройкой, четыре с четвёркой и так далее. Малыш из некоторых кубиков построил «башню» на полу своей комнаты и показал её Карлсону. Спереди башня выглядит как на рис. 1, сбоку — как на рис. 2, а сверху — как на рис. 3. Карлсон оглядел башню со всех сторон и сложил все числа, которые увидел. Какая наименьшая сумма у него могла получиться?

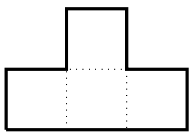


рис. 1

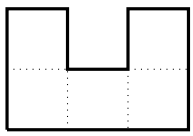


рис. 2

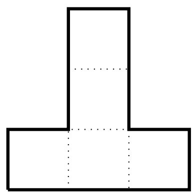


рис. 3

3. У дракона в подземелье хранится 100 слитков золота. Также у него есть двое волшебных весов. Первые умеют измерять и показывать суммарный вес любых трёх предметов, но их заряда осталось лишь на 34 взвешивания. Вторые могут показать суммарный вес двух предметов, но их заряда хватит только на одно взвешивание. Как дракону узнать общий вес своих золотых слитков с помощью этих весов?

4. Каждому из трёх мудрецов секретно сообщили по одному натуральному числу, потом на доске написали произведение этих трёх чисел.

Первый посмотрел на доску и сказал: «Теперь я знаю ваши числа, но не знаю, у кого какое».

Второй ответил: «Моё число наименьшее из трёх».

Третий: «Теперь я уверен, что число первого больше моего на 10».

Назовите число, которое могло быть написано на доске, если известно, что оно меньше 40. Найдите все ответы и покажите, что других нет.

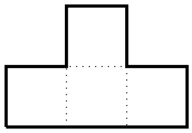
5. Маленький Леголас учится стрелять из лука в квадратную мишень 6×6 клеток. Леголас целится и стреляет, но каждая стрела может попасть как в задуманную им клетку, так и в любую соседнюю с ней по стороне или углу (в стыки и углы клеток стрелы не попадают, за пределы мишени не летят). Леголас похвастался, что гарантированно сможет поразить как минимум пять различных клеток. Являются ли его слова правдой?

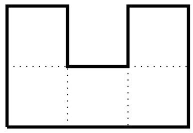
5 класс

1. Варя придумала операцию Ω («Омега»). Если её применить к числам a и b, то получится $a \,\Omega\, b = (a \cdot b - 2) \cdot 3 - a - b$.

Решите уравнение: $x \,\Omega\, 5 = (4 \,\Omega\, 4) - x$.

2. У Малыша есть несколько кубиков с нарисованными числами на каждой из граней: один кубик с единицей на каждой грани, один с двойкой, один с тройкой и так далее. Малыш из некоторых кубиков построил на полу своей комнаты «башню» и показал её Карлсону. Спереди башня выглядит как на рис. 1, сбоку — как на рис. 2, а сверху — как на рис. 3. Карлсон оглядел стоящую на полу башню со всех сторон и сложил все числа, которые увидел. Какая наименьшая сумма у него могла получиться?





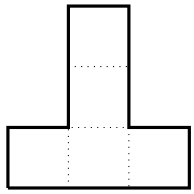


рис. 1 рис. 2 рис. 3

3. У дракона в подземелье в подчинении 15 гномов разного возраста (но неизвестного дракону). Он формирует бригады из трёх гномов и назначает в каждой бригадира (один и тот же гном может участвовать и даже быть бригадиром в нескольких бригадах). Может ли он создать пять бригад так, чтобы хотя бы в одной из них бригадир гарантированно оказался средним по возрасту?

4. Каждому из трёх мудрецов секретно сообщили по одному натуральному числу, потом на доске написали произведение этих трёх чисел.

Первый посмотрел на доску и сказал: «Теперь я знаю ваши числа, но не знаю, у кого какое».

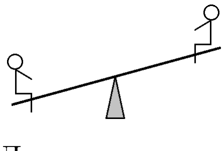
Второй ответил: «Моё число наименьшее из трёх».

Третий: «Теперь я уверен, что число первого больше моего на 10».

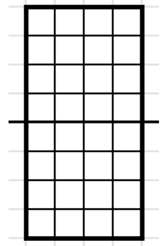
Назовите число, которое могло быть записано на доске, если известно, что оно меньше 70. Найдите все варианты и покажите, что других нет.

5. Маленький Леголас учится стрелять из лука в квадратную мишень 6×6 клеток. Леголас целится и стреляет, но каждая стрела может попасть как в задуманную им клетку, так и в любую соседнюю с ней по стороне или углу (в стыки и углы клеток стрелы не попадают, за пределы мишени не летят). Клетка называется *простреленной*, если в неё попали более одного раза. Для какого наибольшего N Леголас сможет стрелять так, чтобы хотя бы N клеток оказались простреленными к концу тренировки? Количество выстрелов не ограничено.

6 класс



1. Маша, Серёжа и Денис решили покачаться на качелях (см. рис.). Маша весит 40 кг, а Серёжа — 90 кг. Качели не новые, поэтому они находятся в равновесии, только если вес справа в x раз больше веса слева (x всегда одно и то же). Если Серёжа сядет на качели справа, а Денис слева, то качели будут в равновесии. А если Маша сядет на качели слева, а Денис справа, то качели также будут в равновесии. Чему равен x?



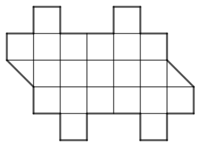
2. Ирина раскрасила каждую клетку прямоугольника 4×8 (см. рис.) в серый, бурый или малиновый цвета так, что в верхней и нижней половинах прямоугольника по 3 серых, по 5 бурых и по 8 малиновых клеток. После этого Ирина согнула прямоугольник пополам по линии, как на рисунке. В итоге все клетки разбились на 16 пар. Две из этих пар состоят из двух серых клеток, три — из двух бурых, две — из серой и малиновой. А сколько пар состоят из двух малиновых клеток?

3. Маленький Леголас учится стрелять из лука в квадратную мишень 6×6 клеток. Леголас целится и стреляет, но каждая стрела может попасть как в задуманную им клетку, так и в любую соседнюю с ней по стороне или углу (в стыки и углы клеток стрелы не попадают, за пределы мишени не летят). Клетка называется «простреленной», если в неё попали хотя бы один раз. Какое наименьшее количество различных клеток может быть прострелено, если Леголас сделал 36 выстрелов, целясь в каждую клетку доски по одному разу?

4. Дед Мороз приехал на остров с 31 жителем. Каждый из них или лжец (всегда лжёт), или рыцарь (всегда говорит правду), или хитрец. Каждый из хитрецов отвечает на первый вопрос на своё усмотрение (лгать или говорить правду), а дальше чередует ложь и правду. Дед Мороз задал каждому три вопроса в таком порядке: 1) «Сэр, Вы рыцарь?» 2) «Сэр, Вы хитрец?» 3) «Сэр, Вы лжец?». На первый вопрос ответ «да» прозвучал 22 раза, на второй — 15 раз, на третий — 9. Сколько на острове хитрецов?

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

7 класс



1. Разрежьте фигуру на рисунке на четыре одинаковые части. Найдите как можно больше способов это сделать.

2. Четверо гитаристов собрались у костра. Всем известно, что гитаристы бывают двух видов: самовлюблённые и скромные. Самовлюблённые увеличивают свои заслуги во сколько-то раз, а заслуги всех остальных во столько же раз принижают (у каждого гитариста может быть свой целочисленный коэффициент). Скромный же, наоборот, свои заслуги преуменьшает в целое число раз, а другие во столько же раз преувеличивает. Как-то подошел к ним Александр Васильевич и спросил: «Если перемножить количества песен, известных каждому из вас, то сколько получится?» Прозвучали следующие ответы: 6, 11 294 304, 294, 9 738 456. Чему может равняться это произведение на самом деле, если каждый гитарист знает, сколько песен знают его коллеги, и каждый знает меньше 250 песен?

3. Есть четыре кучи камней. В двух кучах по 2023 камня, а в двух оставшихся — по 2024. За ход можно взять любое число камней из одной или из двух куч (если берем из двух куч, можно брать разное количество). Играют двое, делая ходы по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при наилучшей игре обоих — начинающий или его противник?

4. Каждому из группы студентов задали посмотреть два видео — по математике и по физике. Константин Максимович смотрел видео по физике на ускорении 2x (то есть с удвоенной скоростью), а видео по математике — на 3x. Александр Васильевич смотрел видео по физике на 3x, а по математике — на 1,5x. Георгий Олегович смотрел видео по физике на 1,25x, по математике — на 2x. Известно, что Александр Васильевич потратил на 51 минуту меньше Георгия Олеговича, но на 50 минут больше, чем Константин Максимович. Сколько времени потратит на просмотр двух видео Екатерина Дмитриевна, если она против ускорения и смотрит с нормальной скоростью?

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Изначально записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

8 класс

1. Каждому из трёх мудрецов секретно сообщили по одному натуральному числу, потом на доске написали произведение этих трёх чисел.

Первый посмотрел на доску и сказал: «Теперь я знаю ваши числа, но не знаю, у кого какое».

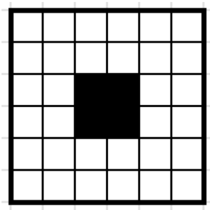
Второй ответил: «Моё число наименьшее из трёх».

Третий: «Теперь я уверен, что число первого больше моего на 10».

Докажите, что у числа, записанного на доске, всегда будет хотя бы 4 делителя.

2. Можно ли разрезать по линиям сетки прямоугольник 6×6 с дыркой (см. рис.) на прямоугольнички так, чтобы:

1) прямоугольничков было хотя бы 6 штук;
2) у каждого из них была чётная площадь;
3) все прямоугольнички были различны?



3. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка D внутри угла ABC такова, что $\angle BAD = \angle DCA$. Докажите, что D лежит по ту же сторону от прямой, соединяющей середины AB и BC, что и A.

4. Вася взял простое число p и возвёл его в куб. Петя возвёл число p в квадрат и умножил получившееся на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получился точный квадрат натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого числа операций получиться число, большее 100000?

9 класс

1. Для четырёх попарно различных ненулевых чисел a, b, c, d выполнено равенство $\dfrac{a}{b+c+d} = \dfrac{b}{a+c+d}$. Докажите, что $\dfrac{c}{a+b+d} = \dfrac{d}{a+b+c}$.

2. Бумажный остроугольный треугольник площади 1 перегнули вдоль прямой, параллельной одной из сторон. Какую наименьшую площадь может занимать полученная фигура?

3. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(a, c)?$$

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

5. В сундуке лежат 2023 монеты. Пираты Билли Бонс и Джон Флинт по очереди берут монеты из сундука. Начинает Билли. За ход пират должен выбрать счастливое число из набора: 2, 3, 4, 5, 6, 7, затем найти остаток от деления числа монет в сундуке на выбранное число (этот остаток должен быть положителен), а потом взять себе столько монет, сколько получилось в остатке. Когда ни один из пиратов уже не может взять ни одной монеты, подводят итог: капитаном становится тот, кто наберёт больше монет. Кто из пиратов сможет стать капитаном независимо от тактики противника?

10 класс

1. Даны три ненулевых числа a, b и c. Прямые $y = a\,x + b$, $y = b\,x + c$, $y = c\,x + a$ пересекаются попарно в трёх различных точках. Может ли через эти точки проходить парабола $y = a\,x^2 + b\,x + c$?

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(a, c)?$$

3. Класс из 30 человек написал контрольную работу, за которую каждый получил оценку от 1 до 5. Непустая группа учеников называется хорошей, если сумма их оценок делится на 10. Какое наибольшее количество хороших групп может быть?

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

5. Прямоугольник разрезан на прямоугольнички двумя горизонтальными и шестью вертикальными линиями. В каждом прямоугольничке Андрей записал то ли площадь, то ли периметр этого прямоугольничка (см. таблицу). Докажите, что Андрей ошибся.

400	402	404	406	408	410	412
300	306	312	318	324	330	336
200	208	216	224	232	240	248

11 класс

1. Вася взял простое число p и возвёл его в 2024-ю степень. Петя возвел p в 2023-ю степень и умножил получившееся число на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получилась 2022-я степень какого-то натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

2. Вася в течение 14 дней ходит на фестиваль. В конце каждого дня он может взять синий, красный или зелёный билет. По окончании фестиваля подсчитываются очки всех участников следующим образом. За каждый синий билет участник получает одно очко. Число очков за каждый красный билет равно удвоенному число имеющихся у участника синих билетов. Число очков за каждый зелёный равно утроенному числу имеющихся у участника красных билетов. Какое наибольшее число очков может набрать Вася?

3. В летний лагерь приехали 2023 девочки и 2023 мальчика. Известно, что каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. В конце лагеря проводится бал, в котором участвуют все дети в парах «мальчик — девочка». Пусть N — число способов разбить детей на пары так, что каждый дружит со своим партнёром. Чему может равняться N? (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

4. На параболе ω выбрали точки A и B, оказалось, что отрезок AB проходит через фокус параболы — точку O. Затем на параболе отметили точку C так, что длины отрезков OC и AB равны. Через точку A провели прямую a, параллельную BC. Через B провели прямую b, параллельную AC. Докажите, что a, b и директриса параболы ω пересекаются в одной точке.

Фокусом и директрисой параболы называются такие точка O и прямая m, что для всякой точки X, лежащей на параболе, расстояние от X до m равно расстоянию от X до O.

5. Сколько решений в рациональных числах может иметь уравнение

$$x^3 + kx^2 - (k+3)x + 1 = 0,$$

где k — вещественный параметр? Приведите все возможности и докажите, что других нет.

Условия очного тура

4 класс

1. В три одинаковых ведра налили воду: первое ведро заполнили до половины, во второе налили 2 литра, а в третьем не хватает 10 литров до полного. Если всю воду перелить в первое ведро, то оно заполнится полностью. Сколько литров помещается в одно ведро?

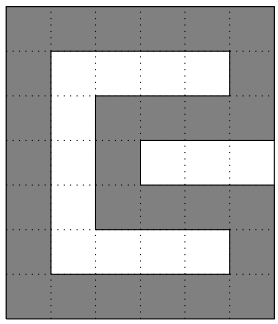
2. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда была первая в этом веке дата с таким свойством?

3. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились написать девочкам валентинки. Они договорились, что все мальчики напишут одинаковое количество валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»).

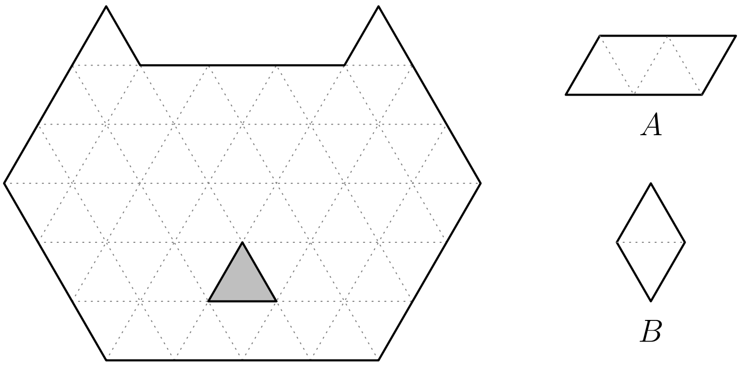
Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку, или остальных?

5. Замкнутая «змейка» рисуется так: из левого верхнего угла она идёт до конца по верхней строчке, затем спускается вниз на две клетки, возвращается по строчке до третьего столбца, снова спускается на две клетки, снова идёт вправо до последнего столбца, и т.д. Змейка достигает последней строчки в правом нижнем углу таблицы, а потом возвращается по последней строке влево и по первому столбцу вверх. На рисунке изображена змейка в таблице 7×6. Костя нарисовал такую змейку, но состоящую из 286 клеток. Какой мог быть размер исходной таблицы? Приведите все варианты и докажите, что других нет.



6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. Может ли сумма этих чисел записываться десятью различными цифрами?

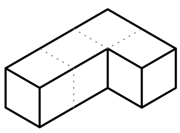
7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).



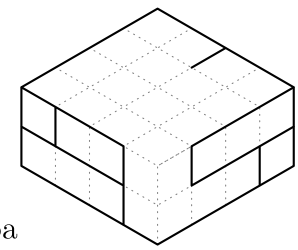
5 класс

1. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда будет последняя в этом веке дата с таким свойством (век заканчивается в 2100-м году)?

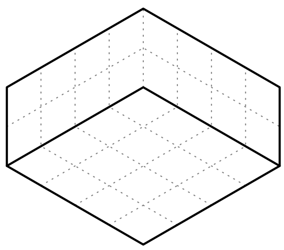
2. У Бори в конструкторе есть детали, склеенные из четырёх кубиков в форме буквы «Г» (см. рисунок). Боря сложил из этих деталей параллелепипед $4 \times 4 \times 2$ и начал изображать его на бумаге в двух проекциях: спереди-сверху и сзади-снизу (так, чтобы были видны все шесть граней), но не закончил. Найдите хотя бы один способ дорисовать все недостающие линии на рисунке Бори.



деталь конструктора



спереди-сверху



сзади-снизу

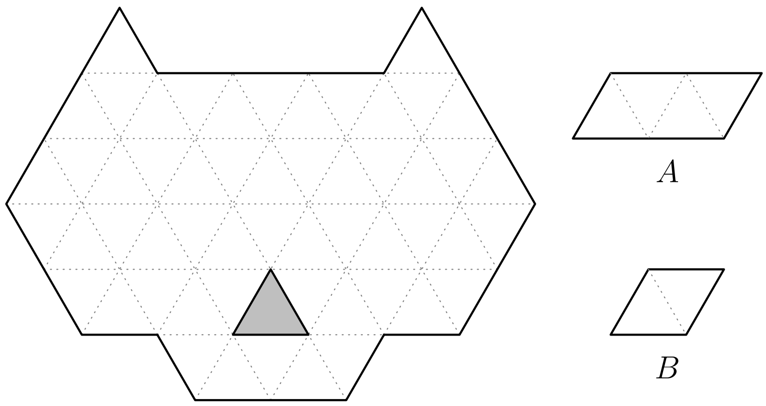
3. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились, что напишут девочкам поровну валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»). Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку или остальных?

5. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

6. На доске написано число 2024. Двое по очереди делают ходы. За ход разрешается дописать на доску два (еще не написанных там) различных целых числа от 1 до 4047 включительно, полусумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги мордочку кота, из которой он вырезал носик (серый треугольник). Какое наименьшее число фигурок типа B потребуется Матроскину, чтобы разрезать эту мордочку на фигурки типов A и B? Матроскин может поворачивать и переворачивать фигурки.



6 класс

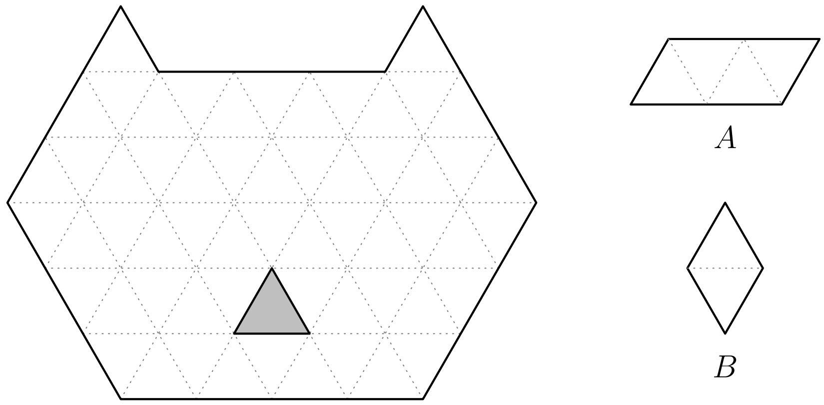
1. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

2. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

3. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

4. На доске написано число 0. За ход разрешается дописать на доску два (ещё не написанных там) различных целых числа от $-N$ до N, сумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от N)?

5. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).



6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. В десятичной записи их суммы все цифры попарно различны. Какова наибольшая возможная такая сумма?

7. По кругу написаны натуральные числа от 1 до 15 (именно в таком порядке). За ход разрешается взять два числа x и y, между которыми стоит ровно одно число, и прибавить к x сумму двух соседей числа y, а из y вычесть сумму двух соседей числа x. Можно ли через некоторое количество шагов сделать все числа равными?

7 класс

1. Вася написал на доске трёхзначное число. Петя заметил, что у этого числа одинаковые остатки от деления на 8 и 15. А Маша заметила, что его последняя цифра равна сумме первых двух. Какое число мог написать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

2. Из пяти внешне неразличимых монет две нестандартны — одна фальшивая, которая весит легче настоящей, а вторая — монета-обманщик. Когда такая монета лежит на одной из чаш весов, весы показывают «невозможный» результат — не такой, как если бы на её месте была настоящая монета, и не такой, как если бы вместо неё была фальшивая. Как за три взвешивания определить, какая монета фальшивая и какая — обманщик?

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, L — точка на стороне BC. Прямая l, проходящая через L, пересекает отрезок AC в точке Y, а продолжение отрезка AB за точку B — в точке X. Что больше: XY или $BX + CY$?

4. В стране 2023 города, некоторые из них соединены дорогами с двусторонним движением. Правительство хочет закрыть некоторые из дорог на ремонт. Известно, что если закрыть любые две дороги, то из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что можно закрыть какие-то три дороги, выходящие из какого-то одного города, и по-прежнему из него можно будет проехать в любой другой город.

5. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди выписывают на доску либо сумму, либо разность последнего и предпоследнего из выписанных чисел. Игра заканчивается, когда на доску выписано 2023 числа. Победитель определяется остатком числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ от деления на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*). Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, остаток 2 — победу Мистера Икс и вечное лето, а остаток 0 — боевую ничью. Кто побеждает при правильной игре, если Королева ходит первой?

6. Круг разбит на 400 секторов. В одном из секторов стоит фишка. За один ход её можно переставить в соседний или в противоположный сектор. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы не было двух соседних непосещённых секторов?

7. У портного есть 11 одинаковых 10-метровых рулонов ткани и 5 клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

8 класс

1. На диаметре AB построена окружность с центром O. На ней отмечены точки D и C так, что хорда DC пересекает диаметр AB в точке P, а $\angle AOD = 3 \cdot \angle BOC$. Докажите, что $OP > \frac{AB}{4}$.

2. На вилле в Лапландии за круглым столом сидели 100 человек: рыцари и шпионы. Рыцари всегда говорят правду и носят одинаковые носки. Шпионы говорят правду друг про друга, а про рыцарей врут, носки у шпионов могут быть какие угодно. У каждого за столом спросили сначала, одинаковые ли носки у соседа слева, а потом — разные ли носки у соседа справа. По одному из вопросов услышали 60 утвердительных ответов. Сколько утвердительных ответов было по второму вопросу?

3. Санта-Клаус проводит «Уникальную Одноразовую Новогоднюю Лотерею». Он один раз выбирает натуральные числа a и b, $a > b$, а затем компьютер автоматически для каждого целого x нумерует числом $\frac{29x+a}{41x+b}$ какой-то из подарков на складе Санты. Может ли Вовочка заранее выбрать для себя какое-то число, которым точно будет пронумерован один из подарков (независимо от изначального выбора a и b)?

4. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди пишут либо сумму, либо разность между последним и предпоследним из выписанных чисел (из последнего вычитается предпоследнее). Игра заканчивается, когда на доску выписаны 2023 числа. Победитель определяется остатком от деления числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*) Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, 2 — победу Мистера Икса и вечное лето, а 0 — боевую ничью. Каким будет результат при правильной игре, если Королева ходит первой?

5. У портного есть 11 одинаковых десятиметровых рулонов ткани и пять клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

6. Дан треугольник ABC. За точку B на луче AB отложен отрезок $BD = AC$. Точка E на плоскости отмечена так, что $\angle BAE = \angle BCA$, $AE = BC$, причём точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно AB. Прямая l проведена через середины отрезков CE и CD. Докажите, что l делит отрезок AB пополам.

7. Стая ворон слетелась праздновать Новый год, и каждая принесла с собой по одному куску сыра какого-то конкретного сорта, причём у всех ворон были разные сорта сыра. После этого некоторые пары ворон попробовали друг у друга сыр, при этом свой сыр никакая ворона не пробовала.

Для каждой пары ворон назовём сорт *продегустированным*, если его попробовала ровно одна ворона из этой пары, причём изначально он не принадлежал ни одной из ворон этой пары.
Оказалось, что для всякой пары ворон количество *продегустированных* сортов больше, чем половина от количества всех остальных ворон. Докажите, что ворон в стае нечётное число.

9 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

2. Приведите пример 3-интересной таблицы для произвольного $n > 3$ и $N = 3n - 2$.

3. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

4. Зафиксируем некоторые n и k ($n > k$). Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица с N строками.

Сюжет 3

Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к ω в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке D. Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $\angle ADF = \angle CDE$.

1. Пусть прямая DF пересекает AC в точке F', DE пересекает AB в точке E'. Докажите, что точки E, E', F, F' лежат на одной окружности.

2. Прямые DE и DF совпали. Докажите, что $BF + CE$ больше четверти периметра ABC.

3. Докажите, что все окружности AEF проходят через фиксированную точку помимо A.

4. Прямая EF пересекает окружность ω в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов EDF и PDQ совпадают.

10 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

2. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

3. Докажите, что для любых $n > k \geqslant 3$ существует k-интересная таблица с $N \leqslant 5n^{k-2}$ строками.

4. Зафиксируем некоторые n и k $(n > k)$. Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

11 класс

Сюжет 1

Цель этого сюжета — доказательство следующего утверждения:

Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существует ровно $(p-3)/2$ упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных чисел, для которых $ab + cd = p$ и $\max(c, d) < \min(a, b)$.

Если r — остаток по модулю p, то назовём четвёрку (a, b, c, d), удовлетворяющую условиям выше, *r-четвёркой*, если $c \equiv ra \pmod p$.

1. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$.

2. Докажите, что для данного r существует не более одной r-четвёрки.

3. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $(p-r)$-четвёрки не существует.

4. Докажите, что для всякого $r \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ существует либо r-четвёрка, либо $(p-r)$-четвёрка.

Сюжет 2

Дан граф $G = (V, E)$ на n вершинах; сопоставим каждой вершине v переменную x_v Пусть T — множество остовных деревьев графа G (то есть поддеревьев, содержащих все вершины). Рассмотрим *остовный многочлен* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in T} \prod_{v \in V} x_v^{\deg_S v - 1}.$$

Назовём связный граф G *хорошим*, если $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ раскладывается на линейные множители (в частности, если P_G — тождественный ноль), иначе *плохим*.

1. Найдите $P_{K_4}(1, 2, 3, 4)$, где K_4 — полный граф на четырёх вершинах.

2. Докажите, что цикл на пяти вершинах является плохим графом.

3. Пусть G — хороший граф, U — некое подмножество его вершин. Граф H состоит из всех вершин, лежащих в U, и всех рёбер графа G, соединяющих эти вершины. Докажите, что граф H тоже хороший.

4. Назовём *раздвоением вершины* v операцию, добавляющую в граф новую вершину v', соединённую ровно с теми же вершинами, что и v. Докажите, что граф, получающийся из одной вершины операциями добавления висячей вершины, раздвоения вершины с добавлением ребра vv' и раздвоения вершины без добавления ребра vv', является хорошим.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

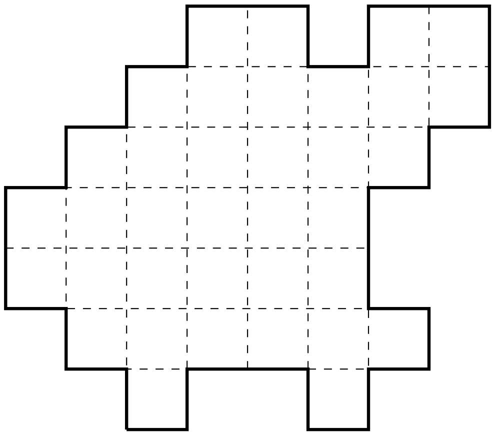
3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

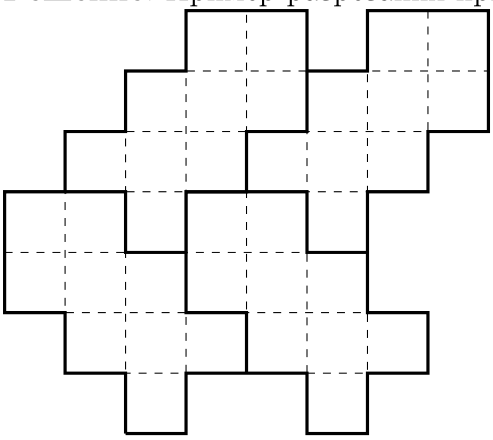
Решения первого отборочного тура

4 класс

1. Разрежьте фигурку на рисунке на четыре равные части.



Решение. Пример разрезания приведён на картинке.



Критерии. Верный пример — 7 баллов.

2. Пасмурным летним днём состоялся дружеский матч между командами рыцарей и лжецов (первые всегда говорят правду, вторые — всегда лгут). С каждой стороны участвовали двое. После игры прозвучали следующие высказывания (по одному высказыванию от каждого игрока):

1) У рыцарей 12 очков, а у лжецов — 11.
2) У рыцарей 11 очков, а у лжецов — 12.
3) Рыцари победили.
4) Мы бы сыграли лучше, если бы нас не слепило солнце!

С каким счётом закончился матч?

Решение. 1) Заметим, что 4 точно лжец, поскольку по условию день был пасмурный, и солнце мешать игрокам не могло.

2) Среди 1 и 2 хотя бы один является лжецом, поскольку их утверждения противоречат друг другу, и не могут одновременно быть истинными.

3) Значит, 3 точно рыцарь, и его утверждение истинно.

4) Тогда 1 — рыцарь, а 2 — лжец.

Матч закончился 12-11 в пользу рыцарей.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Обосновано, что 4 лжец — 3 балла.

Указано, что 1 и 2 не могут быть оба рыцарями (кто-то из них врёт) — 2 балла.

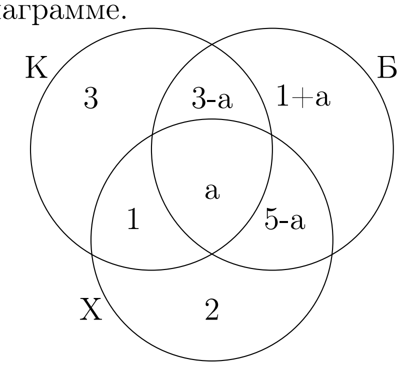
Ответ без объяснений — 1 балл.

3. В одном из классов интересной спортшколы учится 30 ребят. Из них кёрлингом занимаются 7, бобслеем — 9, 8 — хоббихорсингом (из которых двое — только им). Трое ходят на тренировки и по бобслею, и по кёрлингу одновременно. Пятеро — одновременно на бобслей и хоббихорсинг. Все остальные всё время уделяют черлидингу.

Сколько существует вариантов отправить на соревнования команду из спортсмена, который занимается хотя бы двумя видами спорта и чирлидера?

Ответ. 90, 105, 120 или 135 вариантов.

Решение. Расположим на кругах Эйлера все три вида спорта. Пусть a — количество учеников, занимающихся всеми тремя видами спорта. Расставим остальные числа в диаграмме.

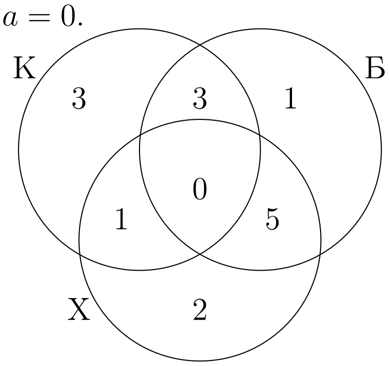


Нам подходят следующие варианты $a = 0$, 1, 2 или 3 (отрицательного количества учеников быть не может).

Всего этими видами спорта занимается 15 детей. Тогда чирлидеров $30 - 15 = 15$.

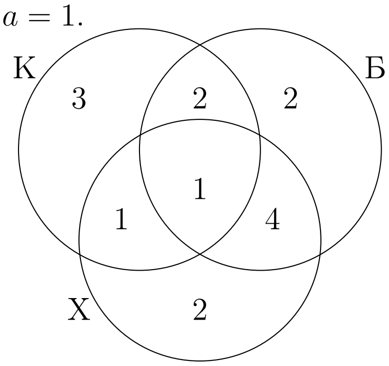
Рассмотрим варианты:

$a = 0$.



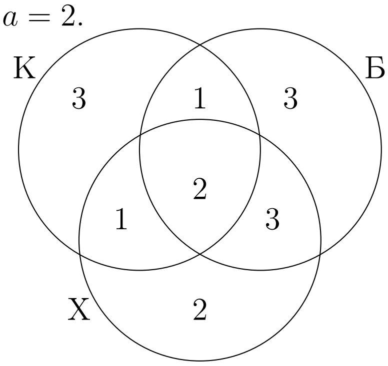
Хотя бы двумя видами спорта занимается 9 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $9 \cdot 15 = 135$.

$a = 1$.



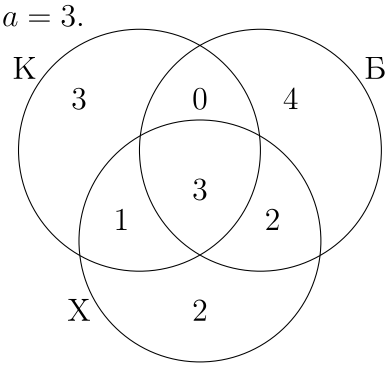
Хотя бы двумя видами спорта занимается 8 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $8 \cdot 15 = 120$.

$a = 2$.



Хотя бы двумя видами спорта занимается 7 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $7 \cdot 15 = 105$.

$a = 3$.



Хотя бы двумя видами спорта занимается 6 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $6 \cdot 15 = 90$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Разобран один вариант — 2 балла.

Разобрано 2-3 варианта — 4 балла.

Разобраны все варианты, но не обосновано, что это все варианты — 5 баллов.

4. Вася и Петя задумали по пятизначному числу без повторяющихся цифр, причем разность между любыми соседними цифрами в их числах не меньше 7. У Пети получилось наибольшее возможное из таких чисел, а у Васи — наименьшее. Чему равна сумма задуманных ими чисел?

Ответ: 109899.

Решение. Петино число, чтобы быть наибольшим, должно иметь максимальные значения в каждом разряде, начиная с наибольшего. Начинаем с максимальной цифры — 9, следующая не может быть больше 2, но если она 2, то далее цепочка прервётся (9 уже занята), значит, следующая не больше 1, затем может идти только 8, и следом 0 и 7. Получается: 91807 Васино число, чтобы быть наименьшим, должно иметь минимальные значения в каждом разряде, начиная с наибольшего. Первая цифра не бывает 0, потому минимальная 1. Далее, минимальная подходящая 8. Затем 0. 9 и 2. Итого получаем: 18092. $91807 + 18092 = 109\,899$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

За верно найденное (каждое) число (без объяснения, почему оно максимальное/минимальное) — 2 балла (т.е. в сумме до 4 баллов).

За верно найденное (каждое) число (с объяснением, почему оно максимальное/минимальное) — 3 балла (т.е. в сумме до 6 баллов).

Ошибка на этапе суммирования — 6 баллов (следует из критериев выше)

5. Трем школьникам поручено шесть ночей наблюдать за звездным небом, причем за каждым школьником закреплен конкретный участок неба. У них есть два телескопа. Если смотреть через первый телескоп, то будет видно вдвое больше звёзд, чем невооружённым глазом, а если через второй, то втрое больше. Каждую ночь двое школьников подходят к телескопам (а третий смотрит глазами), считают звёзды каждый на своём участке и складывают результаты. В понедельник ими было насчитано в сумме 2020 звёзд, во вторник — 2021, в среду — 2022, ..., в субботу — 2025 звёзд. Новых звезд за это время не появлялось, и никакие звезды не исчезали. Докажите, что кто-то из школьников обсчитался.

Решение. Всего существует шесть способов распределить школьников по телескопам (у первого три варианта — взять один из телескопов или смотреть глазами, у второго — два, так как один вариант уже занят первым, а третий берёт что осталось). Так как во все дни были получены разные результаты, каждый способ расстановки школьников по телескопам был задействован ровно один раз. Это значит, что каждый школьник дважды смотрел на свой участок глазами, дважды — через первый телескоп и дважды — через второй телескоп. То есть каждый школьник за шесть дней насчитает чётное число звёзд. Но всего они насчитали 2020+2021+2022+2023+2024+2025=12135 звёзд, то есть нечётное количество.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Идея про четность/нечетность суммы всего посчитанного (а дальше что-то пошло не так) — 4 балла.

5 класс

1. По узлам сетки квадрата 5×5 метров двигается робот. За секунду он может либо проехать на 1 метр вперёд, либо повернуться на 90° против часовой стрелки. Изначально робот находится в нижнем левом углу и смотрит наверх. За 13 секунд он смог добраться до правого верхнего угла. Сколькими способами робот мог это сделать?

Решение. Чтобы попасть в противоположный угол, робот должен сделать минимум 5 ходов по вертикали вверх и 5 ходов по горизонтали вправо. Изначально робот смотрит вверх, чтобы ему посмотреть вправо, нужно сделать минимум три поворота против часовой стрелки. Итого уже имеем $5 + 5 + 3 = 13$ ходов, то есть ровно столько, сколько есть у робота. Значит он сделал РОВНО три поворота, РОВНО 5 ходов вверх и РОВНО 5 ходов вправо, причем сначала шли все ходы вверх, а потом вправо (более, чем однократная смена направлений потребовала бы более трёх поворотов). Итак, робот сначала сделал пять ходов вверх, затем три поворота против часовой стрелки, затем пять ходов вправо. Ответ: один способ.

Критерии: Ответ 1 балл, описание единственного способа - 3 балла, баллы суммируются.

2. Петя и Вася живут в одном подъезде 41-этажного дома. Вася зашел в подъезд и оказался на первом этаже. После чего он поднялся к себе домой, а затем спустился в гости к Пете. Оказалось, что он прошел в два раза больше лестничных пролетов, чем он прошел бы, если поднялся сразу к Пете. С другой стороны он прошел столько же лестничных пролетов, сколько бы он прошел, поднявшись сразу на последний этаж. На каком этаже живет Вася?

Решение. Второе из условий говорит нам что дорога от Васиного этажа до последнего такая же по длине, как и от Васиного этажа до Петиного. То есть, Васин этаж находится ровно посередине между Петиным и 41-ым. Первое же условие говорит нам, что дорога от первого этажа до Петиного такая же, как дорога от Петиного этажа до Васина и обратно, а эта дорога (как мы уже знаем из предыдущей фразы) — то же самое, что дорога от Петиного этажа до 41-го. Итак Петя живет ровно посередине между 1 этажом и 41-ым. то есть, на 21-ом этаже, а Вася — на середине пути между Петиным этажом и последним, то есть на 31-ом этаже.

Критерии: Ответ 2 балла, объяснено где живет Петя — 3 балла, запись (правильных) действий, приводящих к ответу почти без комментариев – 4-5 баллов.

3. Рыбаки плотно расселись по берегу круглого пруда и начали удить рыбу. После того как была выловлена тысячная рыбина, они обнаружили, что каждый из них поймал столько карпов, сколько двое его соседей (слева и справа) вместе поймали щук. Водился ли в пруду ещё какой-либо вид рыб? Объясните свой ответ.

Ответ: да, водится. Если рыбак попросит каждого своего карпа пожать руку одной из соседних щук (каждый – своей щуке), то щук как раз хватит. В итоге каждая щука пожмет две руки — карпу слева и карпу справа. Поэтому всего карпов вдвое больше чем щук, а всего щук и карпов - втрое больше чем щук. Но 1000 не кратно трем, поэтому были пойманы и другие рыбы.

Критерии: ответ 0 баллов, мысль о том что карпов вдвое больше, чем щук без пояснений — 3 балла, мысль о том, что 1000 не делится на 3 – 2 балла, баллы суммируются

4. У Вари есть 27 карточек с двузначными числами (числа на карточках не повторяются). Докажите, что она может составить из двух своих карточек четырехзначное число, которое начинается и заканчивается одной и той же цифрой.

Решение. Вообразим на секундочку, что Варя не смогла так составить карточки. Что это значит? Это значит то, что ни у какой карточки цифра в разряде десятков не совпадает с цифрой в разряде единиц никакой ДРУГОЙ карточки. Значит все цифры разбиваются на несколько типов: встречающиеся только в разряде единиц 2) встречающиеся только в разряде десятков 3) встречающиеся и в разряде единиц, и в разряде десятков на одной-единственной карточке (и больше нигде) 4) не встречающиеся вовсе.

Если есть цифра типа 3) или 4) — например цифра А — то добавим в наш набор карточку ВА, где В — какая то из цифр типа 2) и выкинем из набора карточку АА, если она там была. Таким образом мы избавимся от цифр 3-го и 4-го типа, не создав для Вари возможности составить нужное 4-значное число, а всего карточек по прежнему 27 или больше.

Теперь разберемся, сколько разных комбинаций-карточек из цифр двух типов могло быть сформировано. Цифр какого то из двух типов теперь не менее пяти. Если цифр какого-то типа пять, то второго – не более пяти, значит могло получиться не более $5 \cdot 5 = 25$ карточек, если цифр какого-то типа шесть, то второго – не более четырех, значит могло получиться не более $6 \cdot 4 = 24$ карточек, если какого-то семь, то не более $7 \cdot 3 = 21$ комбинаций, если восемь — не более $8 \cdot 2 = 16$ комбинаций, если девять — не более $9 \cdot 1 = 9$ комбинаций. Значит, в предположении, что у Вари ничего не получится, у нас никак не набирается 27 карточек из условия. Значит, всё у Вари получится!

Критерии: мысль о том, что 27 больше чем $5 \cdot 5$, поэтому сможет — 2 балла, решение, не учитывающее, что карточку АА нельзя поставить в пару с собой — 5 баллов, явно сказано, что если нельзя то комбинаций первой с последней —- произведение не больше 25 — 4 балла.

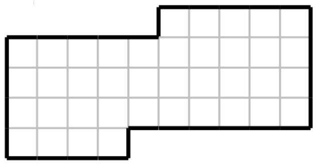
5. В горах 20 поселков, любые два соединены отдельной дорогой — канатной или железной, причем из каждого поселка выходит не менее восьми дорог каждого типа. Экскурсовод пытался составить маршрут, проходящий по всем поселкам по разу и не требующий смены транспорта. Оказалось, что это невозможно! Приведите пример, как такое могло быть (и объясните, почему в Вашем примере невозможно разработать требуемый маршрут).

Решение. Пусть,например, одиннадцать поселков расположены на одной высоте (верхние поселки), девять – на другой (нижние), любые два поселка на одной высоте соединены железной дорогой, а дороги на разных высотах соединены канаткой. Тогда из каждого поселка отходит не менее восьми ж/д линий и не менее девяти канаток. Ж/д маршрута по всем поселкам не существует, так как, двигаясь по железке, нельзя переехать на другую высоту. Двигаясь только по канатке, нельзя объехать все города по разу, поскольку на любом канатном маршруте чередуются верхние и нижние поселки, поэтому их количества отличаются не более чем на один, а у нас верхних поселков на два больше, чем нижних.

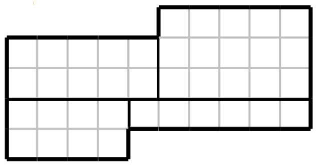
Критерии. Правильная конструкция совсем без обоснования — 4 балла.

6 класс

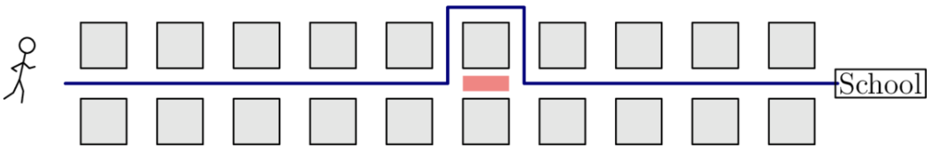
1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



Решение. Например, так.



2. Серёжа каждый день идёт до школы пешком один километр. Его маршрут состоит из 10 городских кварталов одинаковой длины, каждый квартал Серёжа проходит за 1 минуту. Сегодня, пройдя 5 кварталов, Серёжа обнаружил, что ему придётся сделать крюк, пройдя 3 квартала вместо 1 квартала, чтобы добраться до следующего угла (как показано на рис.). Сколько метров в минуту должен проходить Серёжа на оставшемся пути, чтобы добраться до школы в свое обычное время?



Ответ. 140. **Решение.**Расстояние до школы равно 1 км. Следовательно, один квартал равен 100 метров и Серёжа проходит эти 100 метров за 1 минуту. В обычный день Серёжа проходит 10 кварталов за 10 минут. Из-за изменения маршрута Серёжа прошёл пять кварталов (500 метров) с обычной скоростью и 7 кварталов (700 метров) с ускорением. Пять кварталов Серёжа прошёл за 5 минут. Следовательно, оставшиеся 7 кварталов он тоже должен пройти за 5 минут. Значит, за 5 минут он пройдет 700 метров, а за 1 минуту — 140 метров.

Критерии:

- Неправильный ответ — *0 баллов.*
- Правильный ответ в неверном формате — *Не более 5 баллов.*

3. Петя и Вася играют на клетчатой полоске 1×100, по очереди расставляя в её клетки крестики и нолики (в каждой клетке не более одного символа, первым ходит Петя). За один ход Петя ставит один крестик, а Вася — один нолик. Может ли Вася играть так, чтобы ни в какой момент игры на доске не было три крестика «в ряд».

Ответ. Может. **Решение.**Разобьём полоску 1×100 на доминошки 1×2. На каждый ход Пети в какую-то из доминошек 1×2 Вася будет ставить нолик в другую клетку этой доминошки. Докажем, что ни в какой момент игры на доске не будет три крестика «в ряд». Действительно, среди любых трёх подряд идущих клеток есть выделенная доминошка.

Значит, на одной из них будет стоять нолик. Следовательно, при такой игре Васи никогда не будет три крестика «в ряд».

Замечание 1. Также подходит следующая стратегия: будем ставить нолик справа от только что поставленного крестика. Если клетка справа занята, то ставим слева. Если и там занята, то ставим где угодно.

Замечание 2. Стратегия ставить нолик с любой стороны от крестика не работает. Также стратегия ставить нолик с любой стороны, но иногда ставить с другой, когда возникают "плохие конструкции"работает не всегда, так как "плохих конструкций"может быть очень много.

Критерии.

- Приведена верная стратегия без обоснования, что она работает — *2 балла.*
- Приведена неверная стратегия — *0 баллов.*

4. На доску выписаны пятнадцать чисел в порядке возрастания, разница между любыми двумя соседними числами одинакова. Петя не знает выписанных чисел, но знает, что первое число от 1 до 10, второе от 13 до 20, пятнадцатое от 241 до 250. Может ли Петя по имеющимся данным восстановить все числа?

Ответ. Обозначим разницу между соседними числами за d. Если $d \leqslant 16$, то последнее число не больше $10 + 16 \cdot 14 = 234$ (так как первое число не больше 10). Если $d \geqslant 18$, то последнее число не меньше $1 + 18 \cdot 14 = 253$ (так как первое число не меньше 1). Так как последнее число от 241 до 250, то оба этих случая невозможны. Следовательно, $d = 17$. Так как второе число не больше 20 и оно больше первого на 17, то первое число может быть равно 1, 2 или 3. Если первое число равно 1, то последнее равно $1 + 14 \cdot 17 = 239$. Если первое число равно 2, то последнее равно $2 + 14 \cdot 17 = 240$. И если первое число равно 1, то последнее равно $3 + 14 \cdot 17 = 241$. Подходит только последний вариант. Теперь Петя знает первое число и разницу между соседними числами. Значит, он может восстановить все числа.

Критерии.

- Доказано, что разность между числами равна 17 — *3 балла.*
- Приведён пример такой последовательности — *1 балл.*

5. На столе лежит куча из 533 маркеров. Каждую минуту Серёжа выбирает одну из куч с хотя бы четырьмя маркерами, убирает из неё один маркер и делит её на три новые кучи (не обязательно поровну). Могут ли через несколько минут остаться только кучи с двумя маркерами?

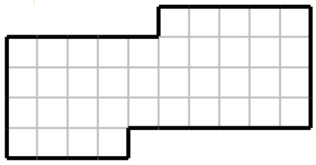
Ответ. Нет. **Решение.**Пусть мы убрали x маркеров. Каждый раз, когда мы убирали маркер, добавлялись две новые кучи. В начале была одна куча. Значит, в конце будет $1 + 2x$ куч. Предположим, что все оставшиеся кучи содержат два маркера. Следовательно, всего в них будет $2 \cdot (1 + 2x) = 4x + 2$ маркера. А убрали мы x маркеров. Значит, всего маркеров будет $4x + 2 + x = 5x + 2$. Но 533 не представляется в виде $5x + 2$, противоречие.

Критерии.

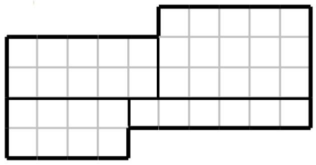
- Замечено, что каждый раз количество кучек увеличивается на 2 — *1 балл.*

7 класс

1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



Ответ:



Критерии.
Верный пример — 7 баллов
Пример где не прямоугольники, но нормальная площадь — 1 балл
остальное — 0 баллов

2. Десять игроков соревнуются в турнире. Каждый игрок играет ровно две игры с каждым игроком. За игру победитель получает 2 очка, проигравший — 0 очков, а в случае ничьей оба получают по 1 очку. Каково минимально возможное количество очков, которое игрок должен набрать, чтобы гарантировать себе победу в турнире (т.е. он имеет больше очков, чем любой другой игрок)?

Ответ: 35 очков.

Решение. Всего максимум каждым сыграно 18 партий, а это 36 очков. Покажем, что 34 очков не достаточно. 34 очка можно набрать 2 способами: либо 17 побед и 1 поражение, либо 16 побед и 2 ничьи. Тогда как в первом, так и втором варианте есть вариант двух игроков с результатом в 34 очка. Если у кого-то есть 35 баллов, то у этого игрока должно было быть 17 побед и 1 ничья. Значит, каждый игрок проиграл хоть 1 партию, а это значит меньше 36-2=34 очков. Получаем 35 достаточно.

Критерии.
верное решение — 7 баллов
есть арифметическая ошибка — 6 баллов
только ответ — 1 балл

3. Клетки квадрата 4×4 раскрасили в шахматном порядке. В каждую чёрную клетку записали число 0, а в каждую белую — 16. Затем с числами в квадрате четыре раза проделали следующую операцию. Для каждой клетки вычислили новое число, равное полусумме всех чисел, записанных в соседних по стороне клетках. После этого все числа стирали, а вместо них записывали эти новые вычисленные числа. Чему равна сумма всех чисел после четвёртой операции?

Ответ: 788.

Решение. Можно заметить что каждый раз на клетках одного из цветов расположены нули. А остальные клетки можно разбить на 3 группы по количеству соседей по стороне: угловые, находящиеся на стороне и центральные. Дальше рассматриваем только не нулевые числа. Угловые зависят только от клеток на стороне и каждый раз от нашего действия в угол записывается число которое до этого было на стороне. На стороне сумма всех чисел из 3 групп деленное на 2. А в центре остается сумма числа на стороне и того, что было в центре. Не нулевых чисел на стороне каждый раз 4, в углах 2, а в центре тоже 2. Дальше запишем следующие числа в формате — (угловое, на стороне, центральное). $(16, 16, 16) \to (16, 24, 32) \to (24, 36, 56) \to (36, 58, 92) \to (58, 93, 150)$. Считаем сумму и получаем $2 * 58 + 93 * 4 + 150 * 2 = 788$.

Критерии.

все подсчитано верно — 7 баллов

ошибка только в финальном подсчете (арифметика) — 6 баллов

есть пример и объяснения как получить итоговую таблицу, но не посчитана сумма — 5 баллов

сделано на 1 операцию меньше и посчитано верно — 4 балла

ошибка в таблице финальной, но направление верное — 3 балла

только верный ответ — 1 балл

4. Константин Максимович закрасил на клетчатой бумаге 2023 квадратика так, что если закрашенную фигуру вырезать, то она не распадётся на части. Могло ли получиться так, что у каждой закрашенной клетки нечётное число закрашенных соседей по стороне?

Ответ: Не могло.

Решение. Представим каждую клетку как вершину и соединим вершины если клетки до этого были соседями. Тогда получаем граф из 2023 вершин с нечетной степенью. Такого быть не может так как сумма степеней должна быть четная.

Критерии.

решение верное — 7 баллов

Есть идея про граф и подсчет степени, но реализовано не корректно — 3 балла

на примере получен ответ — 1 балл

5. Каждый житель острова рыцарей и лжецов является либо рыцарем и всегда говорит только правду, либо лжецом и всегда лжёт. 60 жителей этого острова собрались в круг. Жители высказывались по очереди и каждый произнёс либо фразу «Следующие два говорящих человека за мной будут лжецами», либо фразу «предыдущий оратор являлся лжецом». Сколько в круге может быть лжецов?

Ответ: От 30 до 45 лжецов.

Решение. Посмотрим чтобы лжецов было больше всего. Тогда может быть чередование РЛЛЛ, всего лжецов 45 будет. Посмотрим минимальное число, тогда это вариант чередования РЛ, всего лжецов тогда будет 30. Мы можем заменить РЛЛЛР на РЛРЛР уменьшив число лжецов на 1. Значит, все варианты достижимы.

Критерии.

верное все — 3+4 баллов

объяснено почему можно получить варианты все варианты — 4 балла

есть объяснения почему подходят именно этот диапазон — 3 балла

не верно построено отрицание высказывания — 0 баллов

8 класс

1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BC$, $ADC = 90°$, $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что на отрезке AB можно выбрать точку M так, что $ADCM$ будет прямоугольником.

Решение.

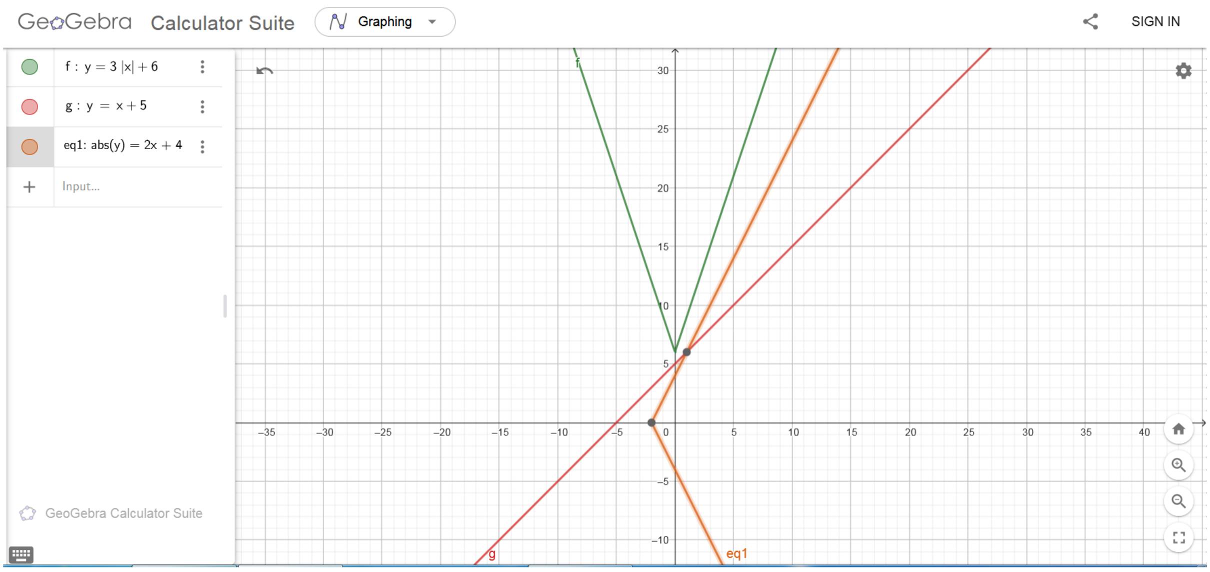
1. Из равенства углов из условия следует, что $BA \parallel CD$.
2. Заметим, что треугольник ABC — равнобедренный, значит угол CBA острый, и основание высоты из вершины C будет на отрезке AB.
3. Назовёт основание высоты точкой M и докажем, что она подходит под необходимые условия.
4. По первому пункту и тому, что $ADC = 90°$ следует, что углы A и C равны $90°$.

Критерии.

1. Построение прямоугольника с неясным положением точки М — 2 балла
2. Не доказано, что высота в треугольнике падает на отрезок AB — штраф в 2 балла

2. Может ли старик Хоттабыч вместо a, b, c, d, e, f вписать в каком-то порядке 6 последовательных натуральных чисел в уравнения $y = a|x| + b$, $y = cx + d$, $|y| = ex + f$ так, чтобы существовала всего одна пара чисел (x, y), которая является решением ровно каких-то двух уравнений и не существовало таких пар (x, y), которые являются решением всех трех уравнений в совокупности?

Решение. Может. Например так. Заметим, что при $x \leqslant 0$ все три части прямых имеют



разные коэффициенты наклона, а значит не будут иметь точек пересечения, кроме одной найденной. При $x < 0$ нетрудно заметить, что у этих кусков прямых никаких общих точек не будет

Критерии. Пример, без обоснования того, что при выборе таких коэффициентах будет необходимое количество пар (x, y), подходящих под условие — 3 балла.

3. На шахматной доске 8×8 Аладдин отметил клетки a8 и b7. Как джинну поставить на доску четырех ферзей на не отмеченные клетки, чтобы они держали под боем все остальные клетки доски, кроме отмеченных?

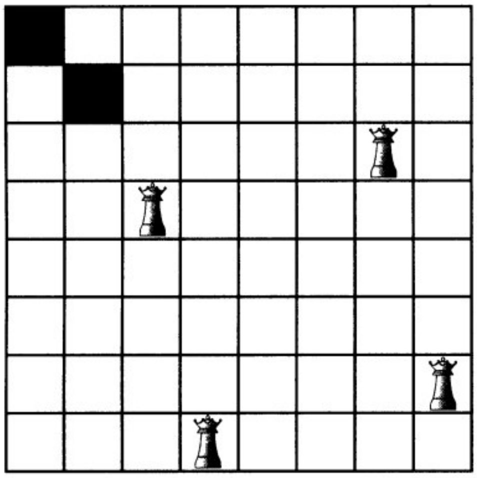
Решение.

Критерии. Правильный пример — 7 баллов.

4. У взрослой гидры 3600 щупалец. Взрослую гидру можно разделить на две, у каждой должно быть ненулевое количество щупалец. Если гидра не взрослая, то у неё каждую секунду вырастает по щупальцу. У взрослой гидры щупальца не вырастают. Какое наибольшее количество взрослых гидр можно получить из одной взрослой особи за час?

Решение. *Оценка*

1. Заметим, что если мы первым шагом разделили гидру на 1800 и 1800, то больше 4 взрослых гидр мы получить не можем. Существует пример на 13, поэтому давайте говорить про меньший отделённый кусок.



2. Пусть осталось t секунд. Тогда, наименьший размер гидры, которая может вырасти это $3600 - t$.

3. Заметим, что любой отделённый кусок может превратиться только в одну взрослую гидру. Пусть это не так, тогда для получение двух больших кусов необходимо хотя бы $1801 \cdot 2$ секунд.

4. Значит наш единственный успешный путь на каждом шаге отделять минимально возможное число, которое дорастёт. *жадный алгоритм*

5. Ответ: 13 гидр.

Пример

Момент времени	Мелкие части
0	3599, 1
1	3599, 1, 2
2	3598, 2, 2, 3
4	3596, 4, 4, 4, 5
8	3592, 8, 8, 8, 8 , 9
16	3584, 16, 16, 16, 16, 16, 17
32	3568, 32 (6 частей), 33 (1 часть)
64	3536, 64 (7 частей), 65 (1 часть)
128	3472, 128 (8 частей), 129 (1 часть)
256	3344, 256 (9 частей), 257 (1 часть)
512	3088, 512 (10 частей), 513 (1 часть)
1024	2576, 1024 (11 частей), 1025 (1 часть)
2048	1552, 2048 (12 частей), 2049 (1 часть)

Состояния гидр указаны после вырастания и разрубания их на части. Считается, что в момент 0 гидру мы могли разрубить.

Заметим, что действие на шаге 2048 не очень осмысленно. Потому что так у нас дорастет часть с 2048 и взрослых будет 12+1. Или же мы остановимся на шаге 1024 и гидр будет одна, доросшая в этот момент + 11 + 1 доросших к концу времени.

Критерии. Пример — 2 балла. Оценка — 5 баллов.

5. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)\,(k_2 + 1) \ldots (k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа 1, p, p^2, $\ldots$, p^6.

Предположим, что $b = p^k\, x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\, d(x) - (k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\, d(x) - (k+1) = 10 - 7$ $\Leftrightarrow (k+1)(d(x) - 1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. НОД$(a, b) = p^{\min\{6,k\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии.

1. Замечание, что $= p^6$ —- 1 балл.

2. Разбор случая $k > 6$ — ещё 1 балл.

9 класс

1. $ABCD$ — трапеция с основанием AD и $\angle BAD + \angle ADC \neq 120^\circ$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно прямой CD, а точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно прямой AB. Докажите, что $A'B'C'D'$ — трапеция.

Решение. Пусть M — точка пересечения прямых AB и CD. Прямая $C'D'$ симметрична прямой CD относительно прямой AB. Поэтому тогда точка M лежит на прямой $C'D'$. Аналогично, M лежит на прямой $A'B'$. Докажем, что треугольники $A'MD'$ и $B'MC'$ подобны. Во первых, $\angle A'MD' = \angle B'MC' \neq 180^\circ$. Во вторых, из подобия треугольников AMD и BMC следует, что $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$, но $AM = A'M$, $BM = B'M$, $CM = C'M$, $DM = D'M$. Следовательно, $\frac{A'M}{B'M} = \frac{D'M}{C'M}$ и треугольники $A'MD'$ и $B'MC'$ подобны. Значит, $\angle D'A'M = \angle C'B'M$, откуда вытекает, что $A'D' \parallel B'C'$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 2 балла, если не доказано, что $M \in C'D'$ и $M \in A'B'$.

2. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$ с натуральными коэффициентами имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Получено равенство $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$ — 2 балла.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)\,(k_2 + 1) \ldots (k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа 1, p, p^2, $\ldots$, p^6.

Предположим, что $b = p^k\, x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x) - (k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - (k+1) = 10 - 7$ $\Leftrightarrow$ $(k+1)(d(x) - 1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. НОД$(a, b) = p^{\min\{6,k\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 2 балла, если не разобран случай $k > 6$. Минус 4 балла, если не разобран случай $k \leqslant 6$.

4. Вычислите

$$\left\lfloor \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \cdots + \frac{\lceil\sqrt{2022}\rceil}{\lfloor\sqrt{2022}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2023}\rceil}{\lfloor\sqrt{2023}\rfloor} \right\rfloor.$$

Здесь $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x, а $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не большее x.

Решение. Обозначим

$$S(n) = \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \cdots + \frac{\lceil\sqrt{n}\rceil}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

Пусть k — некоторое натуральное число. Вычислим:

$$S((k+1)^2) - S(k^2) = \frac{\lceil\sqrt{k^2+1}\rceil}{\lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor} + \cdots + \frac{\lceil\sqrt{(k+1)^2-1}\rceil}{\lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{(k+1)^2}\rceil}{\lfloor\sqrt{(k+1)^2}\rfloor} =$$

$$= \underbrace{\frac{k+1}{k} + \cdots + \frac{k+1}{k}}_{(k+1)^2 - k^2 - 1 \text{ раз}} + \frac{k+1}{k+1} = \frac{k+1}{k}((k+1)^2 - k^2 - 1) + 1 = 2\,k + 3.$$

Следовательно,

$$S(2023) = S(1^2) + S(2^2) - S(1^2) + S(3^2) - S(2^2) + \cdots + S(44^2) - S(43^2) + S(2023) - S(44^2) =$$

$$= 1 + (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + \cdots + (2 \cdot 43 + 3) + \frac{45}{44}(2023 - 44^2) = 2110\frac{43}{44}.$$

Значит, $\lfloor S(2023) \rfloor = \lfloor 2110\frac{43}{44} \rfloor = 2110$.

Ответ. 2110.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 1 или 2 балла за арифметические ошибки.

5. Есть 10 тарелок, на 9 лежит по 100 блинов, одна пустует. Блины раскрашены в 9 цветов, каждого цвета по 100 блинов. Разрешается снять верхний блин с какой-либо тарелки, и переложить его на верх тарелки, где меньше 100 блинов. Всегда ли такими операциями можно сделать 9 стопок по 100 одноцветных блинов?

Решение. Да, всегда. Докажем такое утверждение: можно положить любой блин из стопки X на любое место в стопке Y, при этом

1) верхний блин из стопки Y станет верхним блином в стопке X (если $X \neq Y$);

2) относительный порядок остальных блинов не поменяется.

Пусть позиции перекладываемого блина и места, куда мы хотим его пихнуть — n-я и m-я сверху. Выберем ещё одну стопку T. Переложим верхний блин из неё на доп тарелку. Переложим $n-1$ блин из X на доп тарелку. Переложим n-й блин из X в T. Переложим все блины с доп тарелки обратно в X (теперь там верхний блин — тот который был верхним у T). Переложим m блинов из Y на доп тарелку. Переложим верхний блин из T в Y. Переложим верхний из X верхний в T. Переложим $m-1$ блин в Y и последний, который был верхним в Y, — в X.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Минус 3 балла, если не доказано, что после того, как нужный блин окажется на верху стопки, относительный порядок остальных блинов не поменяется.

Если предъявлен другой алгоритм, то надо аккуратно следить, что он приведёт к результату (например, если не следить за сохранением порядка блинов, то после перекладывания очередного блина предыдущее построение может испортится).

10 класс

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

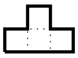
Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Наличие неверных утверждений, не повлиявших на ответ — 6 баллов.

Найдено соотношение на p и q, но не описано, почему $p = 9$ — минимальный подходящий вариант — 5 баллов.

2. Андрей написал в каждой клетке квадрата 4×4 число от 1 до 16 так, что все числа оказались написаны по одному разу. К квадрату подходит Лёня с четырёхклеточной фигурой (см. рис.) в руках. Лёня кладёт свою фигуру в квадрат так, чтобы сумма чисел в этой фигуре была максимально возможной (Лёня может поворачивать свою фигуру). Но

Андрей хочет расставить числа так, чтобы сумма чисел в Лёниной фигуре была минимально возможной. Чему она будет равна? 

Ответ. 34.

Оценка. Квадрат 4×4 можно разрезать на четыре непересекающиеся Т-шки. Общая сумма чисел в квадрате равна $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$, а значит, в одной из Т-шек сумма не менее 34.

Пример. Подойдёт, например, такая таблица:

13	5	12	14
9	4	3	6
8	1	2	11
16	10	7	15

Поясним, почему такая таблица подходит. Разобьём клетки на пары: каждой угловой клетке сопоставим в пару ближайшую к ней центральную. Остальные клетки естественным образом разбиваются на четыре двуклеточные домино. В угловых клетках расставлены наибольшие числа, а в парных клетках — числа, дополняющие друг друга до 17.

Если Т-тетрамино занимает одну угловую клетку, то оно занимает две полные пары клеток, и тогда сумма в ней равна 34. Если Т-шка не стоит в углу, то она не содержит 13, 14, 15 и 16. Но и числа 9, 10, 11 и 12 не могут встретиться в одной Т-шке, а тогда максимально возможная сумма в ней равна $12 + 8 + 7 + 6 = 33 < 34$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Она складывается из трёх частей:

Оценка — 3 балла.

Пример без проверки — 2 балла.

Проверка примера — 2 балла.

Если в оценке есть идея подсчета суммы чисел (и больше ничего нет — например, разбиения квадрата на 4 непересекающиеся фигуры) — 1 балл (из 3).

Решения с неверным ответом — 0 баллов.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

Решение. Рассмотрим число a. У него всего 7 делителей. Следовательно, число a является точным квадратом, так как в противном случае делители бы разбились на пары вида $(d, a/d)$ и их было бы чётное количество. Обозначим через $d(n)$ — число различных делителей числа n. Тогда, если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, то

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_m + 1).$$

Так как $d(a) = 7$ — простое число, то у числа a всего один простой делитель p, и, кроме того, $a = p^6$, а на первом листе выписаны числа $1, p, p^2, \ldots, p^6$.

Предположим, что $b = p^k x$, где k — целое и неотрицательное, а x — натуральное и не кратное p. Рассмотрим два случая: $k \leqslant 6$ и $k > 6$.

Пусть $k \leqslant 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x) - (k+1)$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - (k+1) = 10 - 7$ $\Leftrightarrow (k+1)(d(x) - 1) = 3 \Leftrightarrow \{k = 2, d(x) = 2\}$ или $\{k = 0, d(x) = 4\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^2$ или НОД$(a, b) = p^0$ — это точные квадраты.

Пусть $k > 6$. Тогда к делителям, которые записаны на первом листочке, число b добавит ещё $(k+1)\,d(x) - 7$ новых делителя. Следовательно, $(k+1)\,d(x) - 7 = 10 - 7 \Leftrightarrow (k+1)d(x) = 10$ $\Leftrightarrow$ (т.к. $k > 6$) $\{k = 9, d(x) = 1\} \Rightarrow$ НОД$(a, b) = p^{\min\{6,9\}} = p^6$ — это точный квадрат.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Присутствуют все возможные варианты, кроме $b = p^k$ — 5 баллов.

Разобраны все варианты, но в некоторых нет подробного описания почему подходят/не подходят варианты — 6 баллов.

Решения, в которых считается, что у b ровно 3 делителя — 0 баллов

4. В турнире по футболу играли несколько команд. Каждые две команды сыграли один матч. За победу давали два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — ничего. После турнира выяснилось чем больше очков у команды, тем меньше голов она забила (суммарно за весь турнир) и тем больше голов пропустила. Какое наименьшее количество команд могло быть?

Решение. В текущей формулировке (в условии задачи пропущено условие, что команды набрали разное количество очков) задача становится тривиальной: подойдёт $k = 2$, и команды сыграли вничью.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Пример с 2 командами вничью — 7 баллов

Все ответы, кроме 2 и 5 команд — 0 баллов

Решение с 5 командами:

Оценка - 5 баллов

Пример - 2 балла

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

Решение. Пусть $\angle DBF = \alpha$, $\angle FBE = \beta$ (мы хотим доказать, что $\alpha = \beta$), $\angle FAB = \gamma$. Из вписанности $\angle CAF = \alpha$. Тогда $\angle BFE = \gamma$, как угол между хордой и касательной. Из суммы углов треугольника EFB получаем $\angle FEB = 180^\circ - \beta - \gamma$. Так как точки A, B, E и C лежат на одной окружности, то $\angle CAB = \beta + \gamma$, то есть $\angle DAF = \beta$, что и требовалось доказать.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$ с натуральными коэффициентами имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

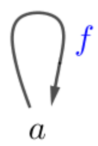
2. Найдите количество функций $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ для которых верно $f(f(f(x))) = x$ для всех $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

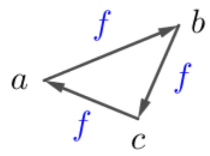
Решение. Возьмем какое-нибудь число $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда возможны два варианта:

1. Если $f(a) = a$, то и $f(f(f(a))) = a$.
2. Предположим $f(a) = b$ и $b \neq a$. Тогда $f(b) = c$, где $c \neq a$ и $c \neq b$. Иначе
   (a) Если $f(b) = a$, то $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(a) = b \neq a$.
   (b) Если $f(b) = b$, то $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(b) = b \neq a$.

   И так как $a = f(f(f(a))) = f(f((b))) = f(c)$, то $f(c) = a$.

Таким образом, для любого $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ либо $f(a) = a$, либо есть три различных числа таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$.



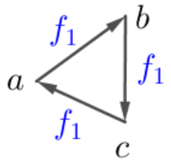


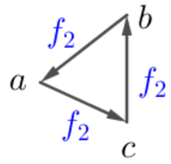
При этом любая функция с таким свойством подходит.

Тогда найдем число функций с необходимым свойством.

1. Нет ни одной тройки элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Значит, для всех чисел $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ верно $f(a) = a$.

   Такая функция одна.
2. Есть одна тройка элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Выбрать тройку можно C_6^3 способами. При этом есть два способа задать функцию в тройке.





   Итого $2C_6^3$ функций.
3. Есть две тройки элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Выбрать первую тройку можно C_6^3 способами, остальные три элемента образуют вторую тройку. Но варианты в которых выбрали в первую тройку a, b, c и выбрали все кроме a, b, c одинаковые. То есть $C_6^3 : 2$ способов разбить элементы на две тройки. При этом в каждой тройке есть два способа задать функцию.

   Итого $2 \cdot 2 \cdot C_6^3 : 2 = 2C_6^3$ функций.

Всего число функций равно

$$1 + 2C_6^3 + 2C_6^3 = 81.$$

Ответ. 81 функция.
Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Верно описана функция $f(x)$ — 3 балла.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

Решение. Следующее рассуждение работает на одной из картинок, а именно когда на окружности ω_1 точки расположены в порядке $ABEC$, а на ω_2 — в порядке $AFBD$. Тогда

$$\angle FBE = 360^\circ - \angle AEB - \angle FBA = 180^\circ + \angle ECA - \angle FDA$$

из вписанности $ABEC$ и $AFBD$. Тогда поскольку $\angle FDA$ — внешний в треугольнике CDF, $\angle ADF - \angle ACF = \angle DFC$, который в свою очередь равен $\angle DAF$ в силу того, что FC — касательная. Тогда $\angle FBE = 180 - \angle DAF = \angle DBF$. Значит BF – биссектриса $\angle DBE$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

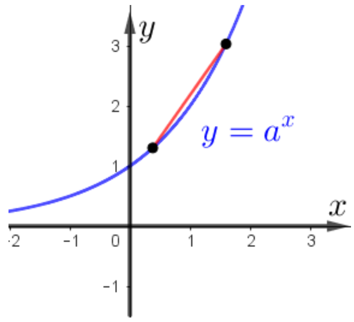
4. Докажите, что для любого $x \in [0,\ 2]$ верно

$$2^x + 1 - \sqrt{10,5x + 4} \leqslant 0.$$

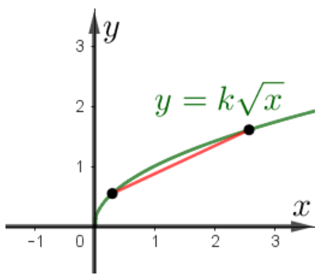
Решение 1. Перепишем неравенство, данное в условии:

$$2^x \leqslant \sqrt{10{,}5x + 4} - 1.$$

Посмотрим на график степенной функции. Если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит выше графика.



С графиком функции $y = \sqrt{10{,}5x}$ наоборот: если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит ниже графика.
График функции $\sqrt{10{,}5x + 4} - 1$ это сдвинутый по осям абсцисс и ординат график функции $y = \sqrt{10{,}5x}$. Значит, и для графика функции $y = \sqrt{10{,}5x + 4} - 1$ верно: если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит ниже графика.

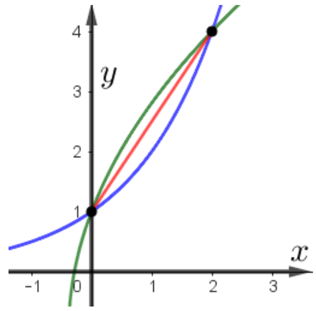


То есть в каждой точке отрезка $[0; 2]$ все значения функции 2^x не меньше чем значения $\sqrt{10{,}5x + 4} - 1$.

$$2^x \leqslant \sqrt{10{,}5x + 4} - 1.$$

$$2^x + 1 - \sqrt{10{,}5x + 4} - 1 \leqslant 0.$$

Подставим значения $x = 0$ и $x = 2$ в левую и правую части неравенства. Получаем, что графики функций 2^x и $\sqrt{10{,}5x+4}-1$ проходят через точки $(0;\, 1)$ и $(2,\, 4)$. Тогда все значения функции 2^x лежат ниже отрезка, соединяющего точки $(0;\, 1)$ и $(2,\, 4)$, а все значения $\sqrt{10{,}5x+4}-1$ выше.



Замечание. Решения, использующие без доказательства свойства функций, не являющихся основными элементарными, не считаются полными.

Решение 2. Обозначим

$$f(x) = 2^x + 1 - \sqrt{10{,}5x+4}.$$

Докажем, что на отрезке $[0;2]$ верно $f(x) \leqslant 0$.

Производная $f(x)$ на отрезке $[0;2]$

$$f'(x) = \ln(2)2^x - \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

Приравняем $f'(x)$ к 0:

$$0 = \ln(2)2^x - \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

$$\ln(2)2^x = \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

$$2^x\sqrt{10{,}5x+4} = \frac{1}{2\ln(2)}$$

Функции 2^x и $\sqrt{10{,}5x+4}$ — возрастающие на отрезке $[0;\, 2]$. Тогда $2^x\sqrt{10{,}5x+4}$ тоже возрастающая. Значит, производная имеет не более одного корня на отрезке $[0;\, 2]$. То есть $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума на отрезке $[0;\, 2]$.

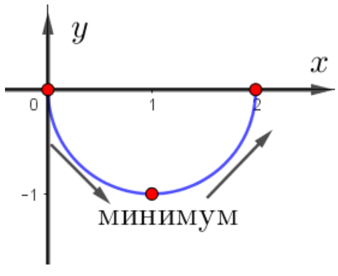
На концах $f(0) = f(2) = 0$.

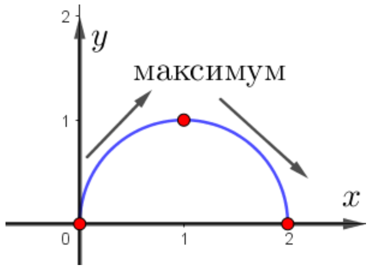
Тогда если на отрезке $[0;\, 2]$ нет точек экстремума и монотонность не меняется, то $f(x) = 0$ на всем отрезке.

Если точка экстремума лежит на отрезке $[0;\, 2]$, то возможны два варианта:

1. Это точка минимума. Тогда функция убывает от 0 до точки минимума, а затем возрастает до 2.

2. Это точка максимума. Тогда функция возрастает от 0 до точки максимума, а затем убывает до 2.





Отметим, что $f(1) < 0$

$$f(1) = 2^1 + 1 - \sqrt{10{,}5 \cdot 1 + 4} = 3 - \sqrt{14{,}5} < 0$$

Значит, возможен только первый вариант. Тогда $f(x) \leqslant 0$ на всем отрезке $[0;\,2]$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Сумма всех натуральных делителей числа n более чем в 100 раз превосходит само число n. Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.

Решение. Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть $\varphi(n)$ — функция Эйлера числа n. (Количество чисел от 1 до n взаимно простых с n.) Тогда для любого натурального числа $n > 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{d|n} d < \frac{n^2}{\varphi(n)}$$

Доказательство леммы. Запишем сумму делителей числа через произведение сумм степеней его простых делителей. Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\sum_{d|n} d = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{\alpha_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots p_k^{\alpha_k}).$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$\sum_{d|n} d = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{\alpha_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= \frac{(p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)}.$$

Функция Эйлера вычисляется по формуле $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1)$. Тогда чтобы получить $\varphi(n)$ в знаменателе, домножим числитель и знаменатель на $p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}$

$$\frac{(p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)} = \frac{p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} (p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1)} =$$

$$= \frac{(p_1^{2\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{2\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \dots (p_k^{2\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})}{\varphi(n)} < \frac{p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}}{\varphi(n)} = \frac{n^2}{\varphi(n)}$$

Решение задачи. По условию и лемме

$$100n < \sum_{d|n} d < \frac{n^2}{\varphi(n)}.$$

Тогда

$$100n < \frac{n^2}{\varphi(n)},$$

$$\varphi(n) < \frac{n}{100}.$$

То есть количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\dfrac{n}{100}$.

Рассмотрим два случая: n делится на 100 и n не делится на 100.

1. Число n делится на 100. Тогда можно разбить числа от 1 до n на $\frac{n}{100}$ групп по 100 идущих подряд чисел. Если количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\frac{n}{100}$, то хотя бы в одной группе не будет числа взаимно простого с n.

2. Число n не делится на 100. Тогда среди чисел от 2 до n можно выделить $\left[\frac{n}{100}\right]$ групп по 100 идущих подряд чисел. Если в каждой группе будет число взаимно простое с n, то чисел взаимно простых с n хотя бы $\left[\frac{n}{100}\right]+1$ (1 тоже взаимно проста с n). Это противоречит тому, что количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\frac{n}{100}$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Решения второго отборочного тура

4 класс

1.

Ответ: 4. Решение:

$a\,\Omega\, b = a \cdot b - 3.$

$3\,\Omega\, x = 3 \cdot x - 3$

$(3 \cdot x - 3)\,\Omega\, 2 = (3 \cdot x - 3) \cdot 2 - 3$

$(3 \cdot x - 3) \cdot 2 - 3 = 15$

$6 \cdot x - 6 - 3 = 15$

$6x = 24$

$x = 4$

Критерии: Правильно преобразовал выражение в уравнение (избавился от омеги) - 2б; Только ответ - 2б; Арифметическая ошибка - 5б.

2. Ответ: 57. Решение: Рассмотрев 3 проекции, можно понять, что фигура состоит из семи кубиков, расположенных определенным образом (см. рис.4). Чтобы минимизировать сумму чисел на видимых гранях, возьмем семь кубиков с наименьшими числами на гранях (то есть кубики 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4). Расставим их следующим образом: чем больше у кубика числа на гранях, тем меньше видимых граней должно быть. Кубик с наибольшими числами на гранях (4) нужно поставить как показано на рис.1 На этой позиции он имеет лишь одну видимую грань. Расставим кубики с числами 3. Наименьшее количество видимых граней будет при расстановке кубиков на две позиции на рис.2 (3 видимые грани) и на позицию на рис.1 (4 видимые грани). Расставим кубики с числами 2 на позиции на рис.2 (4 видимые грани и 5 видимых граней). Оставшийся кубик с числами 1 поставим в позицию на рис.2 (5 видимых граней). Заметим, что Карлсон рассматривает башенку со всех сторон, а не только слева, сверху, сзади и спереди, но поскольку башенка стоит на полу, снизу ее не рассмотреть. Минимальная сумма $4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 57$

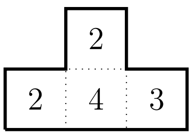


рис. 1

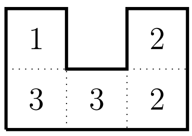


рис. 2

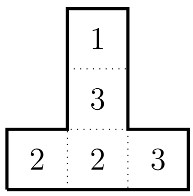


рис. 3

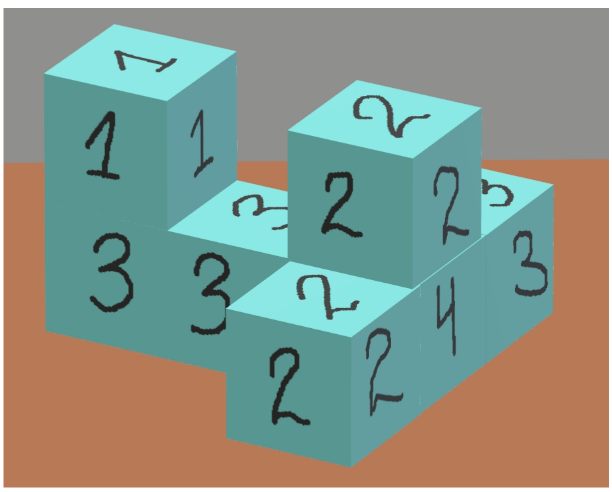


рис. 4

Критерии: Из решения следует, что количество видимых граней должно быть обратно пропорционально величине чисел на гранях - 2б; Верный ответ - 2б; Если 3 и более кубиков поставлены неверно (смотреть по количеству видимых граней) - не более 4б за решение.

3. Приведем возможную последовательность взвешиваний. Используя первые весы, взвесим следующие тройки: $(1, 2, 3), (4, 5, 6)...(94, 95, 96)$. Таким образом мы узнаем суммарный вес первых 96 слитков. Затем взвесим на первых весах слитки $(97, 98, 99)$, а потом $(98, 99, 100)$. Если сложить результаты взвешиваний, то получим вес следующих слитков: $1+2+3+...+97+100+(98+99)\cdot 2$. Затем взвесим на вторых весах $(98, 99)$ и отнимем полученный вес от общего результата. Получим вес $1+2+3+...+97+100+(98+99)\cdot 2-(98+99) = 1+2+...+100$, то есть суммарный вес всех слитков.

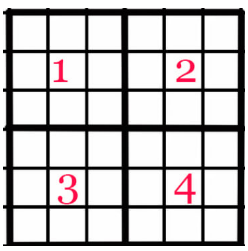
Критерии:

Запутался в последних шагах, не пришел соответственно к ответу - не более 2б.

4. Ответ: 24, 39 Решение: Пусть на доске было записано число A, а первому сказали число B. Так как он смог определить оставшиеся два числа, то A/B однозначно раскладывается на произведение каких-то двух натуральных чисел, значит A/B — простое число.(В противном случае A/B можно было бы разложить на множители уже как минимум двумя разными способами - как произведение множителей составного числа или как произведение 1 и A/B. Значит одному из оставшихся мудрецов сообщили простое число (или единицу), а другому сообщили число 1. Второй сказал, что его число наименьшее из всех, значит 1 точно у него. Третий мудрец сказал, что число первого на 10 больше, чем его число, значит мудрецам сообщили следующие числа: первому - $p+10$, второму - 1, третьему - p. (Заметим, что p не может быть равно 1 так как в этом случае первый мудрец бы знал у кого какие числа, а по условию задачи этого он не знает, значит p - простое). При $p = 2$ ответ 24, он подходит, при $p = 3$ ответ 39 - он тоже подходит, а при p больше 3 ответы будут $\geqslant 15 \cdot 5 \geqslant 75$, что уже больше 40, следовательно других ответов нет.

Критерии: Потеря случая - не более 5б; Доказан факт, что числа второго и третьего мудрецов - это 1 и простое число - 3б; Только ответы - 1б (Только 1 из ответов - 0б); Не объяснено, почему числа должны быть различны или объяснение опирается только на слова второго мудреца - не более 4б за решение.

5. Ответ: Нет. Решение: Докажем, что нельзя гарантировать, что простреленных клеток будет больше четырех. Разделим доску 6x6 на 4 квадрата 3x3. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть «центральная клетка» (всего их 4). Каждая клетка, кроме центральных, является соседней ровно для одной «центральной», следовательно, может так получиться, что все стрелы, которые Леголас выпускал в квадраты 1, 2, 3 и 4, будут попадать в их «центральные» клетки. Следовательно, нельзя гарантировать попадание более чем в 4 различные клетки.



Критерии: Только ответ - 0 баллов. Незначительные логические ошибки - 5б; Обозначены 4 «центральные» клетки квадратов, но отсутствует (или неверное) обоснование факта, что при «неудачном» стечении обстоятельств стрелы могут попадать только в них - 2б.

5 класс

1. Ответ: 3. Решение:

$a \,\Omega\, b = (a \cdot b - 2) \cdot 3 - a - b.$

$x \,\Omega\, 5 = (4 \,\Omega\, 4) - x$

$(x \cdot 5 - 2) \cdot 3 - x - 5 = (4 \,\Omega\, 4) - x$

$(x \cdot 5 - 2) \cdot 3 - x - 5 = (4 \cdot 4 - 2) \cdot 3 - 4 - 4 - x$

$15 \cdot x - 6 - 5 = 48 - 6 - 4 - 4$

$15 \cdot x - 11 = 34$

$15x = 45$

$x = 3$

Критерии: Только ответ - 2б; Правильно преобразовано выражение в уравнении (избавился от омеги) 2б; Серьезная ошибка на начальном этапе преобразований - не более 3б; Арифметическая ошибка в конце преобразований - 5б; Найден ответ, но преобразования не доведены до конца - 6б.

2. Ответ: 83. Решение: Рассмотрев 3 проекции, можно понять, что фигура состоит из семи кубиков, расположенных определенным образом (см. рис.4). Чтобы минимизировать сумму чисел на видимых гранях, возьмем семь кубиков с наименьшими числами на гранях (то есть это будут кубики с числами 1, 2, 3, ... 7). Нужно расставить их следующим образом: чем больше у кубика числа на гранях, тем меньше видимых граней должно быть. Кубик с наибольшими числами на гранях (7) нужно поставить как показано на рис.1 В этой позиции он имеет одну видимую грань (наименьшее возможное количество). Для кубиков с числами 5 и 6 есть два возможных места, в каждом из которых у них по 3 видимые грани (рис. 2). Так же два места есть для кубиков 3 и 4 (рис. 3) - в этих позициях у кубиков по 4 видимых грани. Остались две позиции, в которых кубики имеют по 5 видимых граней - туда поместим кубики с числами 1 и 2. Заметим, что Карлсон рассматривает башенку со всех сторон, а не только слева, сверху, сзади и спереди, но поскольку башенка стоит на полу, снизу ее не рассмотреть. Минимальная сумма $7 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 83$

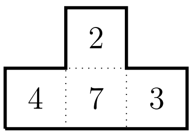


рис. 1

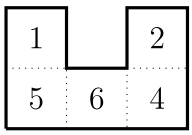


рис. 2

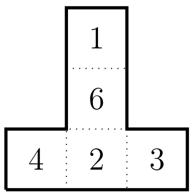


рис. 3

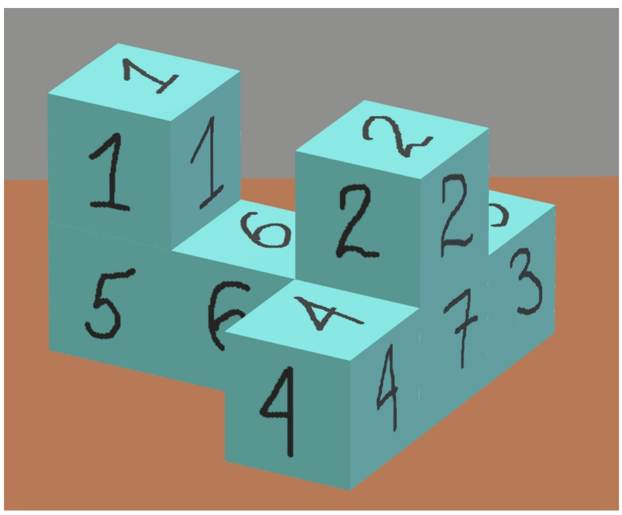


рис. 4

Критерии: Озвучена мысль, что чем больше видимых граней у кубика, тем меньше число на гранях этого кубика - 1б; Верно определено количество кубиков или верно указаны проекции - 2б; Верный ответ без пояснений - 2б; Часть кубиков расположено неверно и неправильный ответ - не более 3б за решение; Все верно, но ответ 80, так как не учетно по одной видимой грани у кубиков с числами 1 и 2 - 4 балла; Верные рассуждения и ответ, но нет ничего из нижеперечисленного - 5 баллов:

-правильно обозначено строение башни, посчитано сколько граней будут видны у каждого кубика

-нарисованы проекции башни и приведен пример расположения кубиков

Дан верный пример, правильно посчитана сумма, но не очевидна минимальность - 6 баллов

Все верно, но допущена арифметическая ошибка - 6 баллов

3. Ответ: Может. Пример: возьмем 5 гномов, назовем их А, Б, В, Г, Д. Тогда можно составить 5 бригад так, чтобы хотя бы в одной из них бригадир гарантированно оказывается средним по возрасту. Например, создадим бригады (А, Б, В), (Б, В, Г), (В, Г, Д), (Г, Д, А) и (Д, А, Б) а бригадиром назначим второго в каждой тройке. Докажем от противного, что в приведенном примере точно найдется тройка, где бригадир - средний по возрасту. Предположим, что в нашем примере из 5 бригад не нашлось ни одной, в которой бригадир средний по возрасту. Тогда, не умаляя общности, пусть

А старше Б, значит В тоже старше Б.

Б младше В, значит Г тоже младше В.

В старше Г, значит Д тоже старше Г.

Г младше Д, значит А тоже младше Д.

Д старше А, а А старше Б по нашему предположению и следовательно А — средний по возрасту в последней бригаде. Противоречие.

Критерии: Только ответ да, можно, - 0б

4. Ответ: $24, 39$ Решение: Пусть на доске было записано число A, а первому сказали число B. Так как он смог определить оставшиеся два числа, то A/B однозначно раскладывается на произведение каких-то двух натуральных чисел, значит A/B — простое число.(В противном случае A/B можно было бы разложить на множители уже как минимум двумя разными способами - как произведение множителей составного числа или как произведение 1 и A/B. Значит одному из оставшихся мудрецов сообщили простое число (или единицу), а другому сообщили число 1. Второй сказал, что его число наименьшее из всех, значит 1 точно у него. Третий мудрец сказал, что число первого на 10 больше, чем его число, значит мудрецам сообщили следующие числа: первому - $p + 10$, второму - 1, третьему - p. (Заметим, что p не может быть равно 1 так как в этом случае первый мудрец бы знал у кого какие числа, а по условию задачи этого он не знает, значит p - простое). При $p = 2$ ответ 24, он подходит, при $p = 3$ ответ 39 - он тоже подходит, а при p больше 3 ответы будут $\geqslant 15 \cdot 5 \geqslant 75$, что уже больше 70, следовательно других ответов нет.

Критерии: В решении никак не учтено то, что первый мудрец смог узнать числа двух других в следствие этого в ответе - лишний вариант, объяснения нет, или объяснение того, как "решение"находилось подбором - 0 баллов

Только правильные ответы - 1 балл

Есть рассуждения про простые числа, но в процессе допущена логическая ошибка и дан неверный ответ - 2 балл

Верные рассуждения про простые числа, но более одной ошибки в ответе - 3 балла

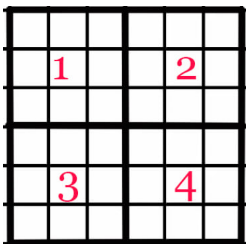
Верные рассуждения про простые числа, но потерян случай или 1 лишний ответ - 5 баллов

В решении подразумевается, что произведение второго и третьего - простое число, но об этом ничего не сказано - 5 баллов

Верный ответ, правильная идея, но в решении допущены незначительные логические ошибки - 5 баллов

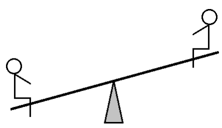
5. Ответ: для $N = 4$. Решение: Докажем, что нельзя гарантировать, что простреленных клеток будет больше четырех. Разделим доску 6×6 на 4 квадрата 3×3. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть «центральная клетка», всего их 4. Каждая клетка, кроме центральных граничит по стороне или углу ровно с одной центральной. Следовательно, может так получиться, что все стрелы, которые Леголас выпускал в квадраты 1, 2, 3 и 4 будут попадать в их центры. Значит, нельзя гарантировать попадание более чем в четыре различные клетки.

Покажем, как можно гарантировать, что простреленных клеток будет хотя бы 4. Леголас может выпустить по 10 стрел в центральные клетки каждого из четырех квадратов. Заметим, что каждая из стрел, выпущенных в центр квадрата 1, попадет в какую-то клетку квадрата 1. Так как в квадрате 1 всего 9 клеток, а выстрелов 10, значит в какую-то из его клеток попадут хотя бы дважды и она станет простреленной. Аналогично с остальными квадратами.



Критерии: Только первая часть решения - 2б; Вторая часть решения - 3б; Всё вместе - 7б Пример без объяснения - 1б.

6 класс



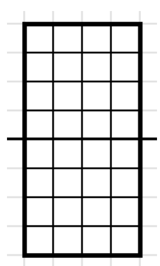
1. Маша, Серёжа и Денис решили покачаться на качелях (см. рис.). Маша весит 40 кг, а Серёжа — 90 кг. Качели не новые, поэтому они находятся в равновесии, только если вес справа в x раз больше веса слева (x всегда одно и то же). Если Серёжа сядет на качели справа, а Денис слева, то качели будут в равновесии. А если Маша сядет на качели слева, а Денис справа, то качели также будут в равновесии. Чему равен x?

Ответ. $x = 1.5$.

Решение. Обозначим через t вес Дениса. Из условия следует, что t больше 40 во столько же раз, во сколько 90 больше t. Следовательно, $\frac{t}{40} = \frac{90}{t}$, откуда $t^2 = 40 \cdot 90 = 3600$. Следовательно, $t = 60$, а $x = \frac{60}{40} = 1.5$.

Критерии:

- Правильный ответ без обоснования — *1 балл.*
- Правильный ответ с примером — *7 баллов.*
- В качестве ответа дан вес Дениса, а не x — *5 баллов.*



2. Ирина раскрасила каждую клетку прямоугольника 4×8 (см. рис.) в серый, бурый или малиновый цвета так, что в верхней и нижней половинах прямоугольника по 3 серых, по 5 бурых и по 8 малиновых клеток. После этого Ирина согнула прямоугольник пополам по линии, как на рисунке. В итоге все клетки разбились на 16 пар. Две из этих пар состоят из двух серых клеток, три — из двух бурых, две — из серой и малиновой. А сколько пар состоят из двух малиновых клеток?

Ответ. 5.

Решение. По условию есть две пары из двух серых клеток и две из серой и малиновой (в сумме 6 серых клеток). Так как серых клеток всего 6, то пар из серой и бурой клеток нет. Всего у нас 10 бурых клеток, а пар из двух бурых клеток 3. Значит, 4 бурые клетки участвуют в парах из бурой и малиновой клеток (а значит, и 4 малиновые). Также две малиновые клетки участвуют в парах из серой и малиновой. Всего малиновых клеток 16, шесть из которых участвуют в разноцветных парах, а 10 — в одноцветных. Значит, всего есть 5 пар из двух малиновых клеток.

Критерии:

• Только пример, как могли совпать цвета — *1 балл.*

• Правильное решение с ответом «10 малиновых клеток» — *5 баллов.*

3. Маленький Леголас учится стрелять из лука в квадратную мишень 6×6 клеток. Леголас целится и стреляет, но каждая стрела может попасть как в задуманную им клетку, так и в любую соседнюю с ней по стороне или углу (в стыки и углы клеток стрелы не попадают, за пределы мишени не летят). Клетка называется «простреленной», если в неё попали хотя бы один раз. Какое наименьшее количество различных клеток может быть прострелено, если Леголас сделал 36 выстрелов, целясь в каждую клетку доски по одному разу?

Ответ. 4.

Решение. Разделим мишень 6×6 на 4 квадрата 3×3. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть “центральная клетка”, всего их 4. Каждая клетка, кроме центральных является соседней ровно для одной “центральной”. Следовательно, может так получиться, что все стрелы будут попадать в “центральные клетки”. Меньше четырёх клеток получиться не могло, так как стрелы, выпущенные в угловые клетки квадрата 6×6, должны попасть в разные клетки.

Критерии:

• Только пример — *1 балл.*

• Только оценка — *3 балла.*

4. Дед Мороз приехал на остров с 31 жителем. Каждый из них или лжец (всегда лжёт), или рыцарь (всегда говорит правду), или хитрец. Каждый из хитрецов отвечает на первый вопрос на своё усмотрение (лгать или говорить правду), а дальше чередует ложь и правду. Дед Мороз задал каждому три вопроса в таком порядке: 1) «Сэр, Вы рыцарь?» 2) «Сэр, Вы хитрец?» 3) «Сэр, Вы лжец?». На первый вопрос ответ «да» прозвучал 22 раза, на второй — 15 раз, на третий — 9. Сколько на острове хитрецов?

Ответ. 18.

Решение. Обозначим через a количество рыцарей, через b количество лжецов, а через c и d количество хитрецов, сказавших правду и сказавших ложь на первый вопрос соответственно. Ответы рыцарей будут «Да», «Нет», «Нет». Ответы лжецов будут «Да», «Да», «Нет». Ответы хитрецов, сказавших правду на первый вопрос будут «Нет», «Нет», «Нет», а ответы хитрецов, сказавших ложь на первый вопрос будут «Да», «Да», «Да». Тогда из условия следует, что $a + b + d = 22$, $b + d = 15$, $d = 9$. Значит, $b = 15 - 9 = 6$, $a = 22 - 9 - 6 = 7$. Тогда рыцарей 7, лжецов 6, а хитрецов $31 - 6 - 7 = 18$.

Критерии:

Пусть «особые» хитрецы — это хитрецы, ответившие «да» на первый вопро.

• Доказано, что на последний вопрос отвечали только особые хитрецы и их 9 — *1 балл.*

• Доказано, что на второй вопрос отвечают только лжецы и особые хитрецы, и что лжецов 6 — *2 балла.*

• Только ответ или пример — *1 балл.* Данный критерий не суммируется с предыдущими.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

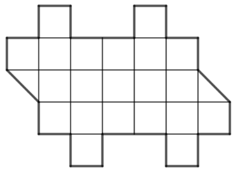
Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого число было от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а до этого от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, оно было от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

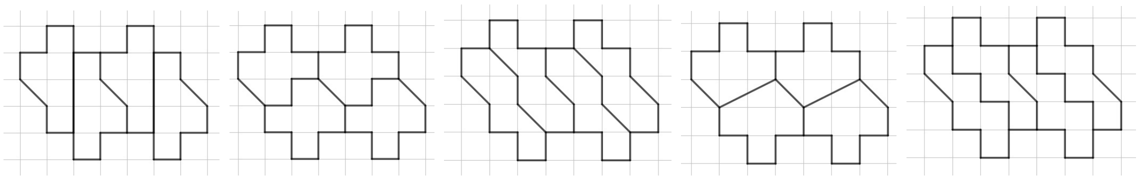
Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.

7 класс



1. Разрежьте фигуру на рисунке на четыре одинаковые части. Найдите как можно больше способов это сделать.

Ответ. Есть много решений. Некоторые примеры разрезания представлены на рисунках:



Критерии. 1 пример разрезания — 1 балл, 2 примера — 3 балла, 3 примера — 5 баллов, 4 примера и больше — 7 баллов.

2. Четверо гитаристов собрались у костра. Всем известно, что гитаристы бывают двух видов: самовлюблённые и скромные. Самовлюблённые увеличивают свои заслуги во сколько-то раз, а заслуги всех остальных во столько же раз принижают (у каждого гитариста может быть свой целочисленный коэффициент). Скромный же, наоборот, свои заслуги преуменьшает в целое число раз, а другие во столько же раз преувеличивает. Как-то подошел к ним Александр Васильевич и спросил: «Если перемножить количества песен, известных каждому из вас, то сколько получится?» Прозвучали следующие ответы: 6, 11 294 304, 294, 9 738 456. Чему может равняться это произведение на самом деле, если каждый гитарист знает, сколько песен знают его коллеги, и каждый знает меньше 250 песен?

Ответ. Есть 6 вариантов: 1908737376, 57624, 14406, 1176, 294, 6.

Решение. Пусть гитаристы знают a_1, a_2, a_3, a_4 песен соответственно. Тогда любой самовлюбленный гитарист называет число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x/x^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4/x^2$. А скромный гитарист называет число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x^3/x = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x^2$. То есть любой ответ отличается на квадрат числа от реального, при этом реальный не больше $250^4 = 3906250000$.

Разложим на простые множители прозвучавшие в условии задачи произведения: $6 = 2 \cdot 3$, $11\,294\,304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^6$, $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, $9\,738\,456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 13^2$. Видно, что подходят ответы $6 = 2 \cdot 3, 294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2, 1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2, 14406 = 2 \cdot 3 \cdot 7^4, 57624 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^4$

и $1908737376 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^6 \cdot 13^2$. Также видим, что другие варианты уже больше, чем $250^4 = 3906250000$.

Критерии. За найденные варианты 1908737376, 294, 6 из ответа — 1 балл. Нахождение оставшихся трёх вариантов — плюс 3 балла. Доказательство отсутствия других вариантов — 3 балла.

3. Есть четыре кучи камней. В двух кучах по 2023 камня, а в двух оставшихся — по 2024. За ход можно взять любое число камней из одной или из двух куч (если берем из двух куч, можно брать разное количество). Играют двое, делая ходы по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при наилучшей игре обоих — начинающий или его противник?

Решение. Убираем первый ходом одну кучку, в которой 2024 камня, и один камень из второй кучки с 2024 камнями. Далее, играя за первого игрока, делаем так, чтобы в кучах было одинаковое количество камней. После хода первого во всех кучах равное количество, а после хода второго хотя бы в одной кучке не ноль. Таким образом, выигрывает первый.

Критерии. Верная стратегия — 7 баллов. Верная стратегия, но не описан первый ход — 2 балла.

4. Каждому из группы студентов задали посмотреть два видео — по математике и по физике. Константин Максимович смотрел видео по физике на ускорении 2x (то есть с удвоенной скоростью), а видео по математике — на 3x. Александр Васильевич смотрел видео по физике на 3x, а по математике — на 1,5x. Георгий Олегович смотрел видео по физике на 1,25x, по математике — на 2x. Известно, что Александр Васильевич потратил на 51 минуту меньше Георгия Олеговича, но на 50 минут больше, чем Константин Максимович. Сколько времени потратит на просмотр двух видео Екатерина Дмитриевна, если она против ускорения и смотрит с нормальной скоростью?

Ответ. 447 и $\frac{9}{23}$ минут.

Решение. Пусть видео по физике длится x минут, по математике y минут.

По условию задачи составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 50 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{1{,}5}y, \\ \frac{1}{1{,}25}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{1{,}5}y + 51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 300 = 2x + 4y, \\ 24x + 15y = 10x + 20y + 1530, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 300 = 2y, \\ 14x = 5y + 1530. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 2y - 300$. Подставляем во второе: $28y - 4200 = 5y + 1530$. Значит, $23y = 5730$ и $y = 249\frac{3}{23}$. Из первого уравнения получаем $x = 498\frac{6}{23} - 300 = 198\frac{6}{23}$.

Итого, Екатерине Дмитриевне потребуется: $x + y = 198\frac{6}{23} + 249\frac{3}{23} = 447\frac{9}{23}$ минут.

Критерии. Верное решение — 7 баллов. Составлена система и есть верный ответ — 3 балла. Составлена система — 2 балла.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого было число от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а ещё раньше от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, было число от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

8 класс

1. Каждому из трёх мудрецов секретно сообщили по одному натуральному числу, потом на доске написали произведение этих трёх чисел.

Первый посмотрел на доску и сказал: «Теперь я знаю ваши числа, но не знаю, у кого какое».

Второй ответил: «Моё число наименьшее из трёх».

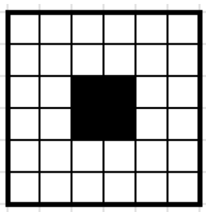
Третий: «Теперь я уверен, что число первого больше моего на 10».

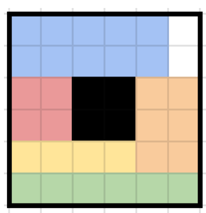
Докажите, что у числа, записанного на доске, всегда будет хотя бы 4 делителя.

Решение. Из утверждения первого мудреца следует, что произведение чисел двух оставшихся мудрецов должно раскладываться в произведение двух множителей единственным образом. Значит, это произведение — либо простое число, либо единица. Единица не может быть, потому что сразу даёт первому мудрецу понимание, что числа второго это 1 и 1. Дальше из утверждения второго мудреца можно сделать вывод, что его число это 1, т. к. его число должно быть самым маленьким и в произведении с другим числом давать простое. И тогда у третьего мудреца должно быть простое число. Подводя итоги, у трех мудрецов должны быть $p, 1, p+10$ (где p — простое число). Тогда у произведения на доске есть делители $1, p, p+10$ и $p(p+10)$ — это уже 4 числа.

2. Можно ли разрезать по линиям сетки прямоугольник 6×6 с дыркой (см. рис. слева) на прямоугольнички так, чтобы:

1) прямоугольничков было хотя бы 6 штук;
2) у каждого из них была чётная площадь;
3) все прямоугольнички были различны?





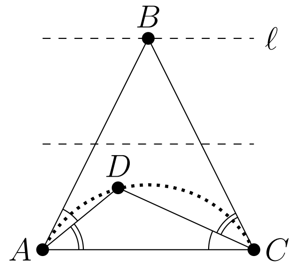
Решение. См. рис. справа.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка D внутри угла ABC такова, что $\angle BAD = \angle DCA$. Докажите, что D лежит по ту же сторону от прямой, соединяющей середины AB и BC, что и A.

Решение. Будем доказывать, что расстояние от D до прямой AC меньше, чем до параллельной ей прямой ℓ, проходящей через B (что эквивалентно требуемому). В ситуации когда точка D лежит вне треугольника ABC, это очевидно. Далее считаем, что D лежит внутри треугольника.

Так как $AB = BC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, и из условия на точку D получаем ещё и равенство углов $\angle DAC = \angle BCD$. Следовательно, $\angle ADC = 180^\circ - \angle BAC$, то есть фиксирован относительно треугольника ABC. Множество таких точек D образует дугу окружности, проходящей через точки A, D, C. Самая дальняя от хорды точка дуги — это середина дуги, значит будет достаточно показать требуемое неравенство для случая, когда D — середина дуги.

В таком случае $\angle DAC = \angle DCA$, и тогда AD и CD становятся биссектрисами треугольника. Значит, тогда D будет центром вписанной в треугольник окружности. Но расстояние от центра вписанной окружности до стороны AC равно её радиусу, а до прямой ℓ — строго больше радиуса (так как все точки прямой ℓ, кроме B, лежат вне треугольника, тем более вне вписанной окружности, а B является вершиной и тоже не может попасть в/на вписанную окружность).



4. Вася взял простое число p и возвёл его в куб. Петя возвёл число p в квадрат и умножил получившееся на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получился точный квадрат натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

Решение. Давайте сначала проверим, что $p = 2$ не подходит: $8 + 4 \cdot 2 + 1 = 17$.

Обозначим число Васи за p, а неизвестный квадрат Коли за x. Тогда, предполагая верность всех вычислений, получаем, что $p^3 + 2p^2 + 1 = x^2$. Вычитая из обеих частей по единице и используя разложение разности квадратов, имеем

$$p^2(p+2) = (x-1)(x+1)$$

Так как НОД$(x+1, x-1) \leqslant 2$, а p должно быть больше 2, ровно одно из чисел $x-1$ и $x+1$ делится на p^2, а значит, не меньше p^2. Это, в свою очередь, значит, что второе из чисел не превышает $p+2$. Но с другой стороны

$$p^2 - (p+2) = p(p-1) - 2 \geqslant 4$$

при $p > 2$, а разность между $x+1$ и $x-1$ составляет всего 2. Значит, ситуация, где никто из ребят не ошибался, невозможна.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого числа операций получиться число, большее 100000?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого число было от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а до этого от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, оно было от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.

9 класс

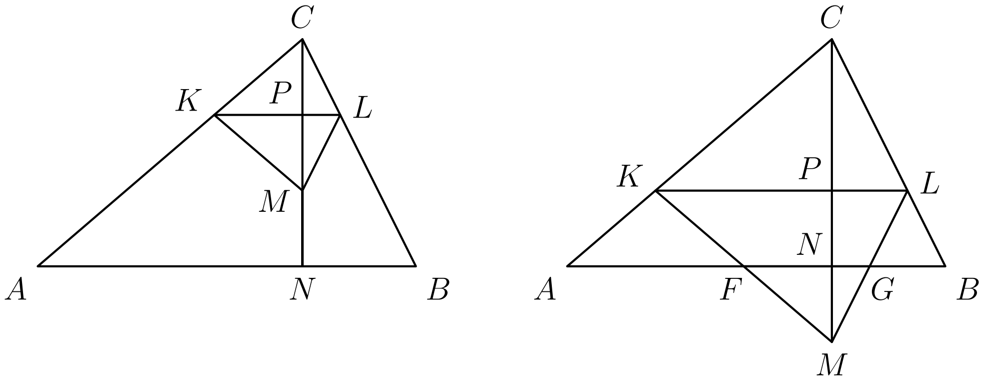
1. Для четырёх попарно различных ненулевых чисел a, b, c, d выполнено равенство $\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{a+c+d}$. Докажите, что $\dfrac{c}{a+b+d}=\dfrac{d}{a+b+c}$.

Решение. Обозначим $S=a+b+c+d$. Тогда $\frac{a}{S-a}=\frac{b}{S-b}\Leftrightarrow S\,(a-b)=0$. Так как $a\neq b$, то $S=0$. Следовательно, $\frac{c}{a+b+d}=\frac{c}{S-c}=\frac{c}{-c}=-1$. Аналогично, $\frac{d}{a+b+c}=-1$.

Критерий. Полное решение — 7 баллов.

2. Бумажный остроугольный треугольник площади 1 перегнули вдоль прямой, параллельной одной из сторон. Какую наименьшую площадь может занимать полученная фигура?

Решение.



Пусть треугольник перегнули вдоль прямой $KL\parallel AB$. Обозначим: M — точка, симметричная точке C относительно KL, $N=MC\cap AB$, $P=MC\cap KL$, $CN\perp AB$, $h=CN$, $x=CP$.

Если $x\leqslant h/2$, то точка M лежит внутри треугольника ABC (см. рисунок слева), а площадь полученной фигуры равна площади трапеции $AKLB$ и равна (так как треугольники ABC и KLC подобны):

$$S_{AKLB}=S_{ABC}-S_{KLC}=1-\left(\frac{x}{h}\right)^2\geqslant 1-\left(\frac{h/2}{h}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Если $x>h/2$, то к площади трапеции $AKLB$ добавляется площадь треугольника MFG, подобного ABC, где $F=AB\cap MK$, $G=ML\cap AB$ (см. рисунок справа). Поэтому площадь полученной фигуры равна

$$S_{AKLB}=1-\left(\frac{x}{h}\right)^2+\left(\frac{2\,x-h}{h}\right)^2=3\,\left(\frac{x}{h}\right)^2-4\,\frac{x}{h}+2=\left(\sqrt{3}\frac{x}{h}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{2}{3}\geqslant\frac{2}{3}.$$

Следовательно, наименьшая площадь полученной фигуры равна $\frac{2}{3}$, и это значение достигается при $x=\frac{2}{3}\,h$.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Если не сказано, что наименьшее значение площади достигается, — 6 баллов. Если разобран только второй случай ($x>h/2$) — 4 балла. Если разобран только первый случай ($x\leqslant h/2$) — 2 балла.

3. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a,b)+\text{НОК}(b,c)=\text{НОК}(a,c)?$$

Решение 1. Из равенства $\text{НОК}(a,b)=\text{НОК}(a,c)-\text{НОК}(b,c)$ следует, что $\text{НОК}(a,b)$ делится на c (так как $\text{НОК}(a,c)$ и $\text{НОК}(b,c)$ делятся на c). Кроме того, $\text{НОК}(a,b)$ делится на

a. Следовательно, НОК(a,b) является общим кратным чисел a и c, и НОК$(a,b) <$ НОК(a,c). Это противоречит тому, что НОК(a,c) — наименьшее общее кратное.

Решение 2. Докажем от противного, что таких a, b, c не существуют. Пусть такие натуральные числа существуют. Среди всех подходящих троек выберем ту, у которой число c минимально. Пусть эта тройка a, b, c. Предположим, что p — это простой делитель числа c. Тогда НОК$(a,c) \vdots p$ и НОК$(b,c) \vdots p$. Значит, НОК(a,b) тоже делится на p. Построим новую тройку a', b', c':

$a' = a$, если $a \not\vdots\, p$, и $a' = a/p$, если $a \vdots p$;

$b' = b$, если $b \not\vdots\, p$, и $b' = b/p$, если $b \vdots p$;

$c' = c/p$.

Тогда:

$$p\,\text{НОК}(a',b') + p\,\text{НОК}(b',c') = p\,\text{НОК}(a',c').$$

Сокращая на p, получаем, что тройка чисел a', b', c' тоже удовлетворяет исходному равенству, но $c' < c$. Следовательно, c не может иметь простых делителей. Значит $c = 1$. Поэтому

$$\text{НОК}(a,b) + b = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОК}(a,b) = a - b,$$

но это невозможно, так как НОК$(a,b) \geqslant a > a - b$.

Замечание 1. Можно не брать подходящую тройку с минимальным c, а провести процедуру деления на простой делитель числа c до тех пор, пока у c не останется простых делителей.

Замечание 2. Процедуру сокращения простого делителя можно также провести и с числами a и b.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Если показано, что можно сократить на простой делитель числа c (или числа a, или числа b), — 5 баллов.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

Решение. Пусть $F = AC \cap BD$ — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Так как прямая $A'C'$ симметрична прямой AC относительно прямой BD, то $F \in A'C'$. Кроме того $A'F = FC'$. Поэтому $AF \cdot FC = A'F \cdot FC'$. Аналогично, $F \in B'D'$ и $BF \cdot FD = B'F \cdot FD'$. Так как $ABCD$ — вписанный, то $AF \cdot FC = BF \cdot FD$. Следовательно, $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$. Значит четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный. Действительно, из $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$ вытекает $\frac{A'F}{FD'} = \frac{B'F}{FC'}$, а так как $\angle A'FB' = \angle C'FD'$, то треугольники $A'FB'$ и $C'FD'$ подобны, и $\angle A'B'F = \angle D'C'F$. Поэтому четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. При этом часть доказательства после слова «Действительно» можно опустить.

5. В сундуке лежат 2023 монеты. Пираты Билли Бонс и Джон Флинт по очереди берут монеты из сундука. Начинает Билли. За ход пират должен выбрать счастливое число из набора: 2, 3, 4, 5, 6, 7, затем найти остаток от деления числа монет в сундуке на выбранное число (этот остаток должен быть положителен), а потом взять себе столько монет, сколько получилось в остатке. Когда ни один из пиратов уже не может взять ни одной монеты, подводят итог: капитаном становится тот, кто наберёт больше монет. Кто из пиратов сможет стать капитаном независимо от тактики противника?

Решение. Игра закончится, когда в сундуке останется 1680 монет, так как 1680 — это наибольшее число, которое меньше 2023 и делится на НОК$(2,3,4,5,6,7)$. Поэтому пираты заберут $2023 - 1680 = 343$ монеты. Для победы надо набрать не менее $(343+1)/2 = 172$ монеты.

Покажем, что Флинт (второй игрок) сможет обеспечить себе победу, если он всегда будет брать себе остаток от деления на 7.

1. Флинт всегда сможет сделать ход. Если перед ходом Билли в сундуке лежит $7\,k$ монет, то после хода Билли в сундуке будет не менее $7\,k-5$ и не более $7\,k-1$ монет. Поэтому Флинт сможет взять хотя бы две монеты и после хода Флинта в сундуке будет $7\,(k-1)$ монет.

Перед первым ходом Билли в сундуке $2023 = 7 \cdot 289$ монет. Следовательно, Флинт всегда сможет сделать ход, а перед каждым ходом Билли число монет в сундуке будет кратно 7.

2. Так как $1680 = 7 \cdot 240$, а за пару ходов число монет в сундуке уменьшается ровно на 7, то всего игроки сделают по $289 - 240 = 49$ ходов.

3. Докажем, что Билли не сможет набрать 172 монеты. Так как перед ходом Билли число монет в сундуке кратно 7, то Билли не сможет взять остаток от деления на 7. Поэтому он никогда не возьмёт 6 монет.

Пусть перед ходом Билли в сундуке $7\,k$ монет.

Билли сможет взять 5 монет, если $7\,k \equiv 5 \pmod 6 \Leftrightarrow k \equiv 5 \pmod 6 \Leftrightarrow k \in \{245, 251, \ldots, 287\}$. То есть не более, чем $(287-245)/6+1 = 8$ раз.

Билли сможет взять 4 монеты, если $7\,k \equiv 4 \pmod 5 \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod 5 \Leftrightarrow k \in \{242, 247, \ldots, 287\}$. То есть не более, чем $(287-242)/5+1 = 10$ раз. Но при $k = 287$ и $k = 257$ Билли выгоднее брать по 5 монет. Поэтому 4 монеты Билли возьмёт не более 8 раз.

Далее будем рассуждать грубее:

3 монеты можно взять не более $\lfloor 49/4 \rfloor + 1 = 13$ раз.

2 монеты можно взять не более $\lfloor 49/3 \rfloor + 1 = 17$ раз.

1 монеты можно взять не более $\lfloor 49/2 \rfloor + 1 = 25$ раз.

Поэтому Билли не сможет взять более, чем

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 25 = 170$$

монет, что меньше, чем требуемые 172 монеты.

Замечание. Если для 3, 2 и 1 монеты произвести точную оценку (с использованием КТО), то можно показать, что Билли не может набрать более 165 монет.

Кроме того, можно перебрать все 49 ходов и посмотреть, какое наибольшее число монет может получить Билли за каждый ход, просуммировать и получить 165.

Внезапно. Если в конце игры Флинт немного изменит стратегию, то он сможет забрать у Билла ещё 2 монеты. Но это уже совсем другая история...

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Указана правильная стратегия Флинта, но не доказана, что она выигрышная — 3 балла.

10 класс

1. Даны три ненулевых числа a, b и c. Прямые $y = a\,x + b$, $y = b\,x + c$, $y = c\,x + a$ пересекаются попарно в трёх различных точках. Может ли через эти точки проходить парабола $y = a\,x^2 + b\,x + c$?

Решение. Не может. Например, прямая $y = b\,x + c$ имеет всего одну точку пересечения с графиком $y = a\,x^2 + b\,x + c$ — начало координат. А по условию парабола должна пересекать каждую из прямых в двух точках — точках пересечения с остальными прямыми.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Доказано, что одна из прямых пересекается с параболой только в точке $x = 0$ — 5 баллов.

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a,b) + \text{НОК}(b,c) = \text{НОК}(a,c)?$$

Решение. Докажем от противного, что таких a, b, c не существуют. Пусть такие натуральные числа существуют. Среди всех подходящих троек выберем ту, у которой число c минимально. Пусть эта тройка a, b, c. Предположим, что p — это простой делитель числа c. Тогда $\text{НОК}(a,c) \vdots p$ и $\text{НОК}(b,c) \vdots p$. Значит, $\text{НОК}(a,b)$ тоже делится на p. Построим новую тройку a', b', c':

$a' = a$, если $a \not\vdots\, p$, и $a' = a/p$, если $a \vdots p$;

$b' = b$, если $b \not\vdots\, p$, и $b' = b/p$, если $b \vdots p$;

$c' = c/p$.

Тогда:

$$p\,\text{НОК}(a',b') + p\,\text{НОК}(b',c') = p\,\text{НОК}(a',c').$$

Сокращая на p, получаем, что тройка чисел a', b', c' тоже удовлетворяет исходному равенству, но $c' < c$. Следовательно, c не может иметь простых делителей. Значит $c = 1$. Поэтому

$$\text{НОК}(a,b) + b = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОК}(a,b) = a - b,$$

но это невозможно, так как $\text{НОК}(a,b) \geqslant a > a - b$.

Замечание 1. Можно не брать подходящую тройку с минимальным c, а провести процедуру деления на простой делитель числа c до тех пор, пока у c не останется простых делителей.

Замечание 2. Процедуру сокращения простого делителя можно также провести и с числами a и b.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Если показано, что можно сократить на простой делитель числа c (или числа a, или числа b), — 5 баллов.

Показано, что НОК двух чисел делится на третье — 2 балла.

3. Класс из 30 человек написал контрольную работу, за которую каждый получил оценку от 1 до 5. Непустая группа учеников называется хорошей, если сумма их оценок делится на 10. Какое наибольшее количество хороших групп может быть?

Ответ: $2^{29} - 1$.

Решение. Оценка. Рассмотрим одного из ученика (пусть это будет Вася). Если группа хорошая и в ней нет Васи, то при добавлении Васи она перестаёт быть хорошей. Если группа хорошая, а Вася в ней есть, то при удалении Васи из этой группы она перестаёт быть хорошей. Значит, на каждую хорошую группу найдётся хотя бы одна плохая. Кроме того, группа из одного Васи плохая, а ей соответствует пустая группа, которая не считается.

Пример строится, если все ученики получили пятёрки. Тогда все группы из чётного количества учеников — хорошие, а неравенство в оценке превращается в равенство.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

верный ответ — 1 балл.

Пример с численным ответом — 3 балла.

Оценка — 4 балла.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

Решение. Пусть $F = AC \cap BD$ — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Так как прямая $A'C'$ симметрична прямой AC относительно прямой BD, то

$F \in A'C'$. Кроме того $A'F = FC'$. Поэтому $AF \cdot FC = A'F \cdot FC'$. Аналогично, $F \in B'D'$ и $BF \cdot FD = B'F \cdot FD'$. Так как $ABCD$ — вписанный, то $AF \cdot FC = BF \cdot FD$. Следовательно, $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$. Значит четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный. Действительно, из $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$ вытекает $\frac{A'F}{FD'} = \frac{B'F}{FC'}$, а так как $\angle A'FB' = \angle C'FD'$, то треугольники $A'FB'$ и $C'FD'$ подобны, и $\angle A'B'F = \angle D'C'F$. Поэтому четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. При этом часть доказательства после слова «Действительно» можно опустить.

Не доказано, что диагонали старого и нового четырёхугольника пересекаются в одной и той же точке, но это используется в решении — не более 5 баллов.

5. Прямоугольник разрезан на прямоугольнички двумя горизонтальными и шестью вертикальными линиями. В каждом прямоугольничке Андрей записал то ли площадь, то ли периметр этого прямоугольничка (см. таблицу). Докажите, что Андрей ошибся.

400	402	404	406	408	410	412
300	306	312	318	324	330	336
200	208	216	224	232	240	248

Решение. Докажем, что найдётся две строки и два столбца, на пересечении которых написано одно и то же (либо площадь, либо периметр). Такую четвёрку прямоугольников назовём хорошей.

Назовём столбец полученной таблицы столбцом типа S, если хотя бы в двух прямоугольниках этого столбца записана площадь, и столбцом типа P — если записан периметр. Заметим, что у нас есть четыре столбца одинакового типа (пусть это будет тип S). В этих четырёх столбцах есть не более четырёх клеток, в которых записан периметр, а значит, найдутся две строки, в каждой из которых (на пересечении с четырьмя столбцами типа S) есть не более одного прямоугольника с периметром. А значит, два из четырёх столбцов типа S в пересечении с этими строками образуют хорошую четвёрку.

Заметим теперь следующее. Пусть есть хорошая четвёрка $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$ типа S (т.е. на каждой клетке написана площадь). Тогда выполнено соотношение $ad = bc$ (это соотношение следует из пропорциональности площадей). А для четёрки типа P выполнено соотношение $a + d = b + c$.

Наконец, докажем, что в предложенной в условии таблицы нет ни одной четвёрки прямоугольникав с таким соотношением. Пусть $a = x + ks$, $b = x + kt$, $c = y + ls$, $d = y + lt$ (где x, y равны 400, 300 или 200, а s, t равны 2, 6 или 8 соответственно). Если $a + d = b + c$, то $x + ks + y + lt = x + kt + y + ls$, т.е. $(k - l)(s - t) = 0$, чего не бывает. А если $ad = bc$, то $(x + ks)(y + lt) = (x + kt)(y + ls)$, т.е. $xlt + yks = xls + ykt$, или $(xl - yk)(t - s) = 0$. Мы уже выяснили, что $s \neq t$ (эти параметры отвечают за номера столбцов), но и $xl \neq yk$: если $x = 400$, то $k = 2$; если $x = 300$, то $k = 6$, а если $x = 200$, то $k = 8$, т.е. если $x > y$, то $l > k$, а тогда $xl > yk$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Соотношения $ad = bc$ (для площадей) и $a + d = b + c$ (для периметров) принимаются без доказательства. Если нет обоснования отсутствия таких соотношений в таблице — дыра в 2 балла.

11 класс

1. Вася взял простое число p и возвёл его в 2024-ю степень. Петя возвел p в 2023-ю степень и умножил получившееся число на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получилась 2022-я степень какого-то натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

Решение. Обозначим за n число, 2022-ю степень которого получил Коля. Тогда, если все вычисления верны, то

$$p^{2024} + 2p^{2023} + 1 = n^{2022},$$
$$p^{2023}(p+2) = n^{2022} - 1,$$
$$p^{2023}(p+2) = (n^{1011} - 1)(n^{1011} + 1),$$

В правой части стоит произведение двух чисел, отличающихся на 2. Их НОД равен 1 или 2. Значит, либо $p = 2$, либо одна из скобок делится на p^{2023}.

1. Если $p = 2$, то левая часть равна 2^{2025}. То есть правая часть — тоже степень 2. Две степени двойки, отличающиеся на 2, — это 2 и 4. Тогда правая часть равна 2^3 и левая часть не равна правой.

2. Одна из скобок делится на p^{2023}. Тогда эта скобка не меньше p^{2023}, а вторая скобка не больше $p + 2$. Но для любого числа большего 2 это невозможно.

Таким образом, кто-то из ребят обсчитался.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Левая и правая части разложены на множители — 3 балла.

2. Вася в течение 14 дней ходит на фестиваль. В конце каждого дня он может взять синий, красный или зелёный билет. По окончании фестиваля подсчитываются очки всех участников следующим образом. За каждый синий билет участник получает одно очко. Число очков за каждый красный билет равно удвоенному число имеющихся у участника синих билетов. Число очков за каждый зелёный равно утроенному числу имеющихся у участника красных билетов. Какое наибольшее число очков может набрать Вася?

Решение. Предположим, что за все 14 дней фестиваля Вася взял x красных билетов. В таком случае каждый синий билет дает $2x + 1$ очко, а каждый зеленый — $3x$ очков. Тогда, если x не равно 0, то Васе выгоднее иметь зеленые билеты, чем синие. (Каждый синий дает не больше очков, чем каждый зеленый.)

Рассмотрим два случая: у Васи 0 красных билетов, у Васи есть только красные и зеленые билеты.

1. Если у Васи 0 красных билетов, то любой зеленый дает 0 очков, а синие дают максимум 14 очков. Итого Вася может получить максимум 14 очков.

2. Если у Васи есть только красные и зеленые билеты, то он получит $3x(14 - x)$ очков. Это выражение достигает максимума при $x = 7$. В этом случае Вася получает 147 очков.

Таким образом, наибольшее число очков, которое может получить Вася равно 147.

Ответ. 147.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Найден выерный ответ — 1 балл.

3. В летний лагерь приехали 2023 девочки и 2023 мальчика. Известно, что каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. В конце лагеря проводится бал, в котором участвуют все дети в парах «мальчик — девочка». Пусть N — число способов разбить детей на пары так, что каждый дружит со своим партнёром. Чему может равняться N? (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

Решение. Посмотрим на всех девочек. Если среди них есть девочка у которой нет знакомых мальчиков, то на пары разбить нельзя и $N = 0$. Если есть девочка, которая дружит ровно с одним мальчиком, то она обязана быть в паре с этим мальчиком. Выкинем этих девочку и мальчика из дальнейшего рассмотрения. Так как эта девочка дружила ровно с одним мальчиком, которого выкинули, у всех оставшихся мальчиков все еще по две знакомые девочки. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не останутся только девочки, у которых не менее двух знакомых мальчиков.

Рассмотрим оставшихся детей как граф, в котором дети — вершины, дружба — ребро. Тогда граф двудольный — доля девочек и доля мальчиков. При этом степени всех вершин в одной доле равны двум, а во второй — не меньше двух. Так как вершин в долях одинаковое число, то степени всех вершин и во второй доле равны двум. Значит, граф представляет из себя набор циклов. Разбить цикл на пары можно двумя способами. Тогда всего имеется 2^k способов разбить граф на пары, где k — число циклов длины хотя бы 4.

Отметим, что в каждом цикле длины 4 не менее двух мальчиков. Значит, циклов длин 4 не более $\left[\dfrac{2023}{2}\right] = 1011$.

Также отметим, что выкидывая девочек, которые дружат ровно с одним мальчиком мы не могли получить пустой граф. Когда в графе останется две девочки и два мальчика единственный возможный вариант графа — цикл. Значит, в графе есть хотя бы один цикл.

Таким образом, возможные варианты для N — это 0 и степени двойки от 1 до 1011. Чтобы получить пример для $N = 0$ достаточно взять граф с изолированной вершиной. Чтобы получить пример для 2^k нужно взять $k-1$ цикл длины 4 и остальные вершины объединить в один большой цикл.

Ответ. 0 и степени двойки от 1 до 1011.

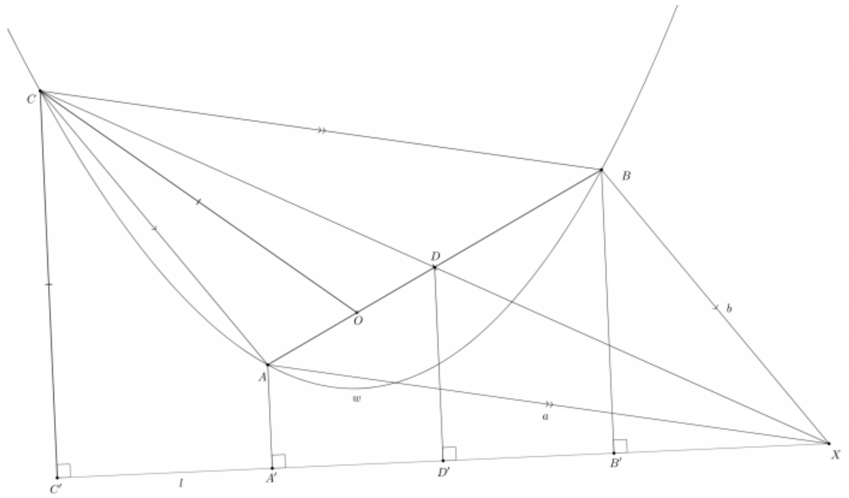
Критерии. Полное решение — 7 баллов.

4. На параболе ω выбрали точки A и B, оказалось, что отрезок AB проходит через фокус параболы — точку O. Затем на параболе отметили точку C так, что длины отрезков OC и AB равны. Через точку A провели прямую a, параллельную BC. Через B провели прямую b, параллельную AC. Докажите, что a, b и директриса параболы ω пересекаются в одной точке.

Фокусом и директрисой параболы называются такие точка O и прямая m, что для всякой точки X, лежащей на параболе, расстояние от X до m равно расстоянию от X до O.

Решение

Пусть l — директриса параболы ω, точка D — середина отрезка AB, прямые a и b пересекаются в точке X. Тогда $ACBX$ — параллелограмм. Следовательно, D — середина отрезка X. Пусть A', B', C', D' — проекции на прямую l точек A, B, C, D соответственно. Тогда $AO = AA', BO = BB', CO = CC'$. Заметим, что DD' средняя линия трапеции $ABB'A'$. Следовательно $DD' = \frac{AA'+BB'}{2} = \frac{AO+BO}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{CO}{2} = \frac{CC'}{2}$. Тогда по теореме Фалеса точки X, C', D' лежат на одной прямой. Следовательно, точка X лежит на директрисе.



Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Сколько решений в рациональных числах может иметь уравнение

$$x^3 + kx^2 - (k+3)x + 1 = 0,$$

где k — вещественный параметр? Приведите все возможности и докажите, что других нет.

Решение Покажем, что у уравнения может быть хотя бы один рациональный или иррациональный корень. Пусть a — рациональное/иррациональное число. Хотим чтобы

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0,$$

$$k = \frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}.$$

Выражение для k определено хотя бы для одного рационального и иррационального a.

Тогда следующая лемма доказывает, что уравнение может иметь либо три рациональных корня, либо три иррациональных корня.

Лемма Если уравнение

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0$$

имеет рациональный корень, то все его корни рациональные.

Доказательство леммы Пусть тогда a — рациональный ненулевой корень уравнения тогда

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}.$$

Поставляя в исходное уравнение, получаем

$$x^3 + \left(\frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x^2 - \left(\frac{3a^2 - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x + 1 = 0.$$

Число a корень этого многочлена, стоящего в левой части. Значит, по теореме Безу он делится на $x - a$. Поделим в столбик и получим:

$$x^3 + \left(\frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) a^2 - \left(\frac{3a^2 - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x + 1 = (x - a)\left(x^2 + \frac{3a - a^2 - 1}{a^2 - a} x - \frac{1}{a}\right).$$

Оставшееся квадратное уравнение имеет рациональные корни, если корень из дискриминанта рационален.

$$\mathrm{D} = \left(\frac{3a - a^2 - 1}{a^2 - a}\right)^2 + \frac{4}{a} = \left(\frac{a^2 - a + 1}{a^2 - a}\right)^2$$

Число a — рациональное, значит, дискриминант — квадрат рационального.

Ответ. уравнение может иметь 0 или 3 рациональных корня.

Замечание. Отметим, что если уравнение имеет три рациональных корня, то все корни различные. Если два из них совпадают, возьмем за a третий корень. Полученное выражение для дискриминанта не равно 0 для рациональных a, значит, двух равных корней быть не может.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

При отсутствии решения, каждый обоснованный случай дает 1 балл: пример уравнения с 3 рациональными корнями, пример уравнения с 3 иррациональными корнями, невозможность 2 рациональных корней.

Решения очного тура

4 класс

1. В три одинаковых ведра налили воду: первое ведро заполнили до половины, во второе налили 2 литра, а в третьем не хватает 10 литров до полного. Если всю воду перелить в первое ведро, то оно заполнится полностью. Сколько литров помещается в одно ведро?

Решение. Перельём воду из второго в третье ведро, тогда в третьем ведре будет не хватать 8 литров. Это в точности содержимое первого ведра, т.е. полведра. Значит, ведро содержит 16 литров.

2. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда была первая в этом веке дата с таким свойством?

Решение. Ответ: 23.11.2003.

xx.xx.2000 не подходит — там уже три нуля (а ещё это последний год XX века, но дети этого могут не знать).

Подойдёт ли нам дата xx.xx.2001? Нули уже использованы, одна единица тоже, поэтому дата будет xx.12.2001, а такого дня нет (день должен записываться одинаковыми цифрами, не меньшими трёх).

Дата в 2002 году должна быть xx.11.2002 (другие месяцы не подойдут), а такого числа нет.

Значит, год должен быть 2003 (такая дата есть), а месяц — не менее чем 11. Единственная подходящая дата в 11 месяце 2003 года — 23.11.2003.

3. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

Решение. Ответ: 15.

Оценка. Заметим, что первый, третий, пятый, седьмой и девятый слева рыцари обязательно скажут «нечётное», а пять других рыцарей ответят, что чётное. Значит, ответов одинакового типа не более 15.

Пример. Всех лжецов мы можем поместить между первым и вторым рыцарями, тогда они скажут, что справа чётное число рыцарей.

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились написать девочкам валентинки. Они договорились, что все мальчики напишут одинаковое количество валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»).

Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку, или остальных?

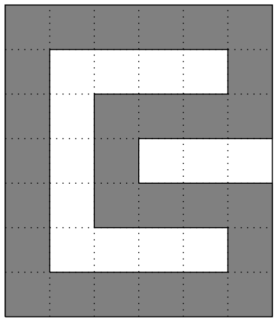
Решение. Остальных мальчиков больше. Назовём мальчиков, осознавших ошибку, *внимательными* мальчиками, а остальных — *беспечными* мальчиками.

Будем считать, что каждый мальчик изначально написал только одну валентинку. Если это не так, то «клонируем» каждого мальчика в стольких экземплярах, сколько валентинок он написал, и пусть каждый клон пошлёт ровно одну валентинку. Так как все мальчики писали поровну валентинок, соотношение внимательных и беспечных мальчиков такое клонирование не изменит.

Каждая девочка получила нечётное количество писем, а от внимательного мальчика ей всегда приходит чётное количество писем. Значит, каждой девочке пришло хотя бы одно письмо от беспечного мальчика. Значит, беспечных мальчиков не меньше, чем девочек. С другой стороны, внимательных мальчиков не больше, чем девочек, потому что никакие два внимательных мальчика не могли писать одной и той же девочке (иначе бы с учётом опровержений такая девочка получила бы не менее четырёх писем).

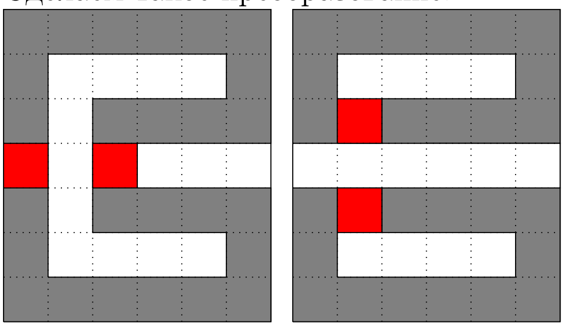
Осталось заметить, что внимательных и беспечных мальчиков не может быть поровну, т.к. всего мальчиков 19.

5. Замкнутая «змейка» рисуется так: из левого верхнего угла она идёт до конца по верхней строчке, затем спускается вниз на две клетки, возвращается по строчке до третьего столбца, снова спускается на две клетки, снова идёт вправо до последнего столбца, и т.д. Змейка достигает последней строчки в правом нижнем углу таблицы, а потом возвращается по последней строке влево и по первому столбцу вверх. На рисунке изображена змейка в таблице 7×6. Костя нарисовал такую змейку, но состоящую из 286 клеток. Какой мог быть размер исходной таблицы? Приведите все варианты и докажите, что других нет.



Решение. Ответ: 51×10, 43×12 или 3×142 (а ещё 142×3, если это считать змейкой).

Сделаем такое преобразование:



После этого змейка распадается на несколько колечек, каждое из которых состоит из $2(x+1)$ клеток, где x — количество столбцов.

Теперь заметим, что $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$. Так как каждое колечко имеет чётную длину, то длина каждого колечка может быть 22, 26 или 286 (а количество колечек, соответственно, 13, 11 или 1).Тогда размеры доски соответственно равны 51×10, 43×12 или 3×142.

Замечание. Два полезных факта про такую змейку.

Факт 1. Количество строк нечётно; более того, оно даёт остаток 3 при делении на 4.

Факт 2. Если доска $(4k+3) \times x$, то змейка будет иметь длину $2(k+1)(x+1)$.

Комментарий для жюри. Если ребёнок пропускает вариант 3×142, а остальные приводит верно, то возможно, он слишком буквально прочитал условие (а в условии змейка делает больше четырёх поворотов). Если ребёнок имел в виду именно это, то предлагаю засчитывать такое решение.

6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. Может ли сумма этих чисел записываться десятью различными цифрами?

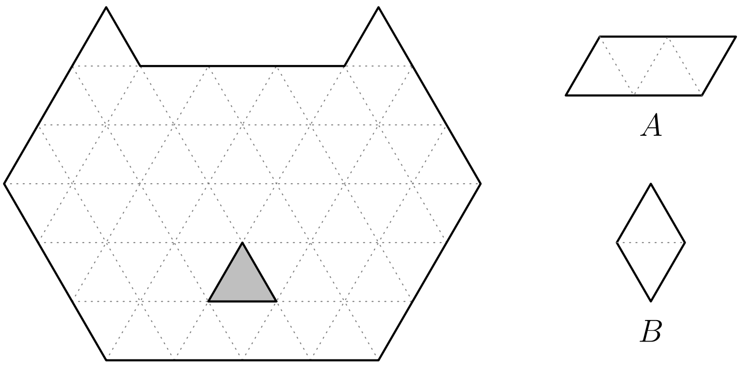
Решение. Не могла.

Обозначим числа из условия через X и Y (пусть $X \geqslant Y$). Предположим, что в десятичной записи X и Y встречаются только цифры a и b (пусть $a > b$). При сложении чисел X и Y столбиком перенос через десяток может быть или на 1, или его вообще нет. Следовательно, цифрами в числе $X+Y$ могут быть только последние цифры чисел $a+a, a+b, b+b, a+a+1, a+b+1, b+b+1, a, b, a+1, b+1$. Последние 4 варианта могут получиться в разрядах, где цифры в Y закончились. Ещё в самом первом разряде могла бы стоять 1, но сейчас мы увидим, что этот случай не реализуется.

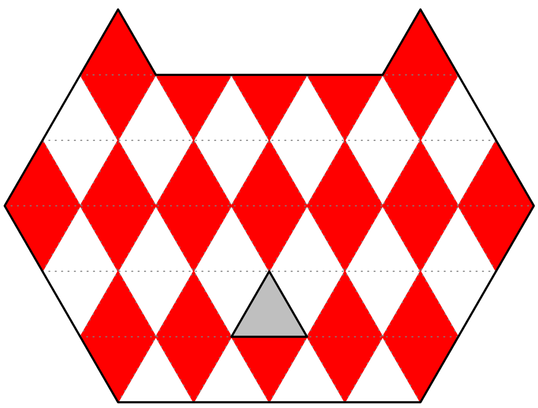
Как мы можем получить четыре варианта $a, b, a+1, b+1$ одновременно? Только если цифры Y закончились, и у нас остался перенос разряда, а затем ещё есть перенос и в следующий разряд. Это значит, что $a = 9$. Но тогда последние цифры чисел $a+b+1$ и b совпадают, и мы приходим к противоречию.

Если в первом разряде суммы стоит 1, то переносов разряда, когда цифры Y закончились, не менее трёх, а тогда в итоговой сумме будет два нуля.

7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).



Решение. Рассмотрим следующую раскраску.



На раскраске 30 клеток закрашено и 28 клеток не тронуто. Причём каждая фигурка типа A в такой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Значит, фигурка типа B будет состоять из двух закрашенных клеток, следовательно, она расположена вертикально.

5 класс

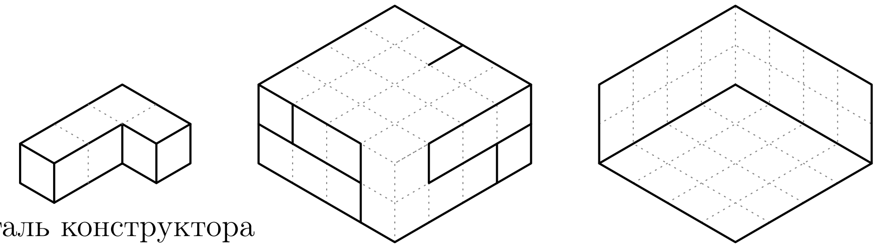
1. Будем записывать календарные даты в формате ДД.ММ.ГГГГ. Сегодняшняя дата 14.01.2024 — первая в этом году дата, в записи которой каждая цифра использована ровно дважды. А когда будет последняя в этом веке дата с таким свойством (век заканчивается в 2100-м году)?

Решение. Ответ: 10.12.2099.

Найдется ли нужная дата в 2100-м году, то есть xx.xx.2100? Нули уже использованы, как и одна единица с двойкой, поэтому месяц должен быть 12-м, а дня xx.12.2100 нет (день должен записываться одинаковыми цифрами, не меньшими трёх).

Значит, год не больше 2099, месяц не больше 12, и среди дней xy.12.2099 находим последний, в котором есть еще один 0 и еще одна 1, то есть 10 декабря.

2. У Бори в конструкторе есть детали, склеенные из четырёх кубиков в форме буквы «Г» (см. рисунок). Боря сложил из этих деталей параллелепипед $4 \times 4 \times 2$ и начал изображать его на бумаге в двух проекциях: спереди-сверху и сзади-снизу (так, чтобы были видны все шесть граней), но не закончил. Найдите хотя бы один способ дорисовать все недостающие линии на рисунке Бори.

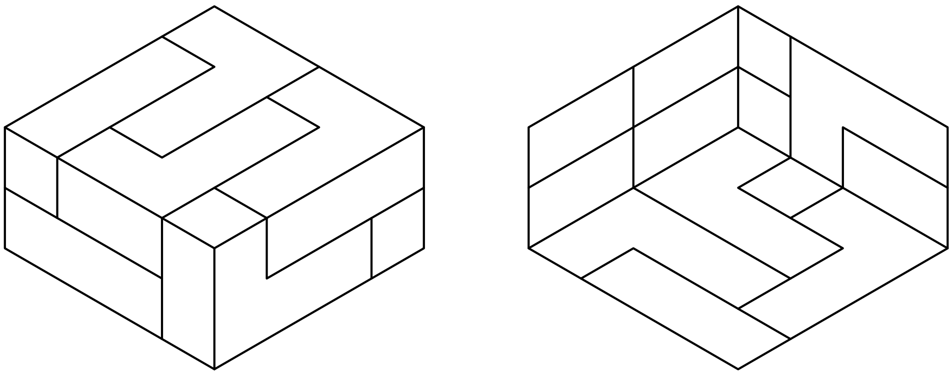


деталь конструктора

спереди-сверху

сзади-снизу

Решение.



спереди-сверху

сзади-снизу

Это решение единственно, но требовать доказательства единственности от детей не надо.

3. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

Решение. Пусть вес всех муравьёв A, вес всех жуков B и один жук может поднять не более x жуков. Тогда двухсотая часть муравьёв может поднять вес $\frac{50}{200}A$. Следовательно, вес всех жуков не превосходит этой величины: $\frac{50}{200}A \geqslant B$. Аналогично, $\frac{x}{200}B \geqslant A$. Поэтому $\frac{50}{200}\frac{x}{200}A \geqslant A$ и $x \geqslant 800$. Значит, максимальная грузоподъёмность одного жука не меньше 800. Поэтому один жук гарантированно сможет поднять 800 жуков.

4. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились, что напишут девочкам поровну валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что сегодня 14 января, а вовсе не 14 февраля, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»). Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку или остальных?

Решение. Остальных мальчиков больше. Назовём мальчиков, осознавших ошибку, *внимательными* мальчиками, а остальных — *беспечными* мальчиками.

Будем считать, что каждый мальчик изначально написал только одну валентинку. Если это не так, то «клонируем» каждого мальчика в стольких экземплярах, сколько валентинок он написал, и пусть каждый клон пошлёт ровно одну валентинку. Так как все мальчики писали поровну валентинок, соотношение внимательных и беспечных мальчиков такое клонирование не изменит.

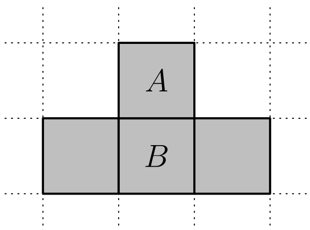
Каждая девочка получила нечётное количество писем, а от внимательного мальчика ей всегда приходит чётное количество писем. Значит, каждой девочке пришло хотя бы одно письмо от беспечного мальчика. Значит, беспечных мальчиков не меньше, чем девочек. С другой стороны, внимательных мальчиков не больше, чем девочек, потому что никакие два внимательных мальчика не могли писать одной и той же девочке (иначе бы с учётом опровержений такая девочка получила бы не менее четырёх писем).

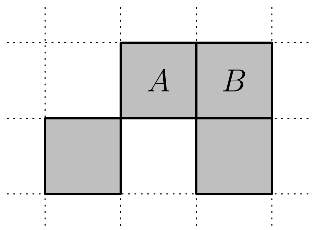
Осталось заметить, что внимательных и беспечных мальчиков не может быть поровну, т.к. всего мальчиков 19.

5. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

Решение. Ответ: нельзя.

Из условия следует, что у каждой клетки может быть 2 или 4 соседа по углу. Посмотрим на самую верхнюю закрашенную клетку A (если таких несколько, то выберем любую). Её соседи по углу могут быть только снизу. Следовательно, она имеет двух соседей по углу и одного по стороне. Обозначим соседа по стороне за B. Если B находится снизу от A, то у B уже три соседа по стороне, что невозможно. Если B находится сбоку от A, то у B минимум два соседа по стороне, то есть четыре по углу. Но A и B это самые верхние клетки, противоречие.





6. На доске написано число 2024. Двое по очереди делают ходы. За ход разрешается дописать на доску два (еще не написанных там) различных целых числа от 1 до 4047 включительно, полусумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Решение. Выиграет первый игрок. Он будет ходить так, чтобы после его хода множество выписанных на доске чисел было бы симметрично относительно числа 2024. Покажем, что первый игрок сможет это сделать.

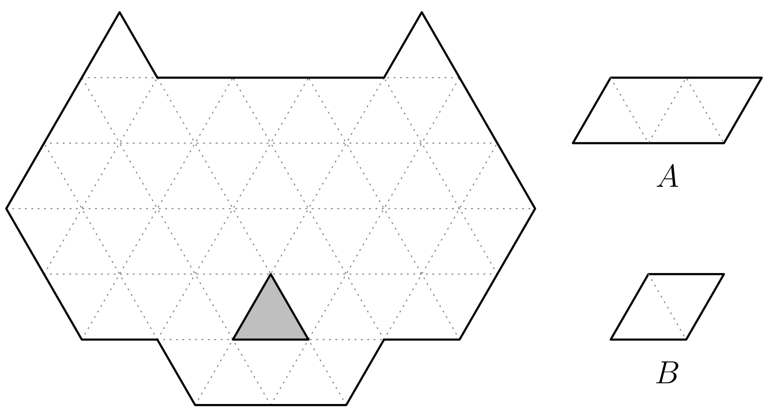
Первым ходом первый игрок выпишет пару $(1, 4047)$; число 2024 уже выписано, $(1 + 4047)/2 = 2024$, значит такой ход легален. Затем будет отвечать на ходы второго игрока следующим образом.

Если второй игрок своим ходом выпишет пару $(a, 4048 - a)$, то первый игрок выпишет пару $(b, 4048 - b)$, где b — любое ещё не выписанное число. Такая пара чисел $(b, 4048 - b)$ существует, так как после хода второго игрока будет выписано чётное число пар чисел, то есть выписаны не все числа, и оба числа из пары не выписаны потому, что множество выписанных чисел симметрично относительно числа 2024.

Если второй игрок выпишет пару (c, d) такую, что $(c+d)/2 = u \neq 2024$, то второй игрок выпишет пару $(4048-c, 4048-d)$. Перед ходом второго игрока множество выписанных чисел симметрично относительно 2024. Поэтому, если число u выписано перед ходом второго игрока, то число $4048 - u = ((4048 - c) + (4048 - d))/2$ тоже выписано, и если числа c и d не были выписаны, то числа $4048 - c$, $4048 - d$ тоже не были выписаны. При этом $4048 - c$ не может совпадать с c (в этом случае $c = 2024$, а 2024 уже выписано), и $4048 - c$ не может совпадать с d (в этом случае $u = (c + d)/2 = ((4048 - d) + d)/2 = 2024$). Аналогично, $4048 - d \neq d$ и $4048 - d \neq c$.

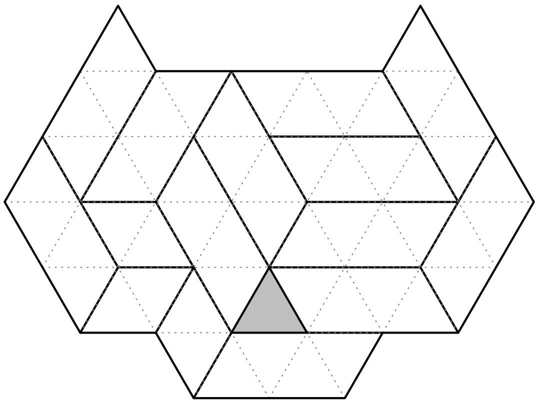
Таким образом, на любой ход второго игрока есть ответный ход первого игрока. Поэтому игра закончится тогда, когда закончатся все числа. Так как всего 2023 пары чисел, то числа закончатся после хода первого игрока. Поэтому победит первый игрок.

7. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги мордочку кота, из которой он вырезал носик (серый треугольник). Какое наименьшее число фигурок типа B потребуется Матроскину, чтобы разрезать эту мордочку на фигурки типов A и B? Матроскин может поворачивать и переворачивать фигурки.

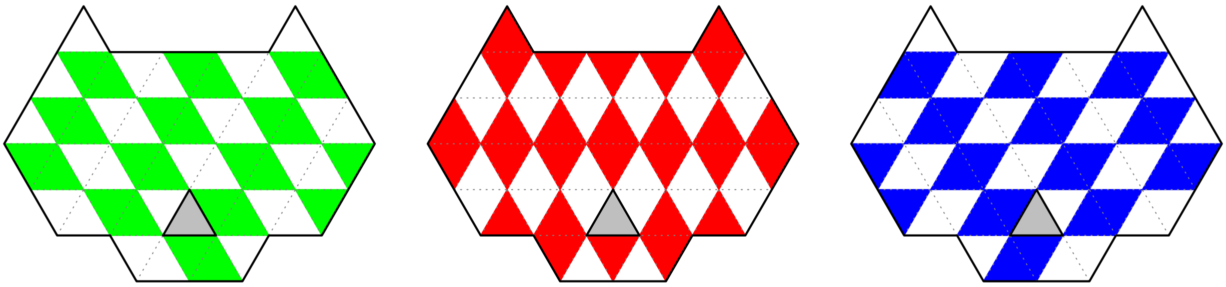


Решение. Ответ: 3.

Пример изображен на рисунке:



Докажем, что меньше трёх фигур типа B получится не может. Рассмотрим три различные раскраски в два цвета, как на рисунке.



На каждой из раскрасок клеток одного цвета 26, другого — 28. Причём фигурка типа A в любой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Следовательно, для каждого из трёх направлений, задаваемых раскрасками существует фигурка типа B. Следовательно, их хотя бы три.

6 класс

1. В ряд в некотором порядке стоят десять рыцарей и десять лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс одну из двух фраз: «Справа от меня чётное число рыцарей» или «Справа от меня нечётное число рыцарей». Какое наибольшее количество фраз одного типа могло быть?

Решение. Ответ: 15.

Оценка. Заметим, что первый, третий, пятый, седьмой и девятый слева рыцари обязательно скажут «нечётное», а пять других рыцарей ответят, что чётное. Значит, ответов одинакового типа не более 15.

Пример. Всех лжецов мы можем поместить между первым и вторым рыцарями, тогда они скажут, что справа чётное число рыцарей.

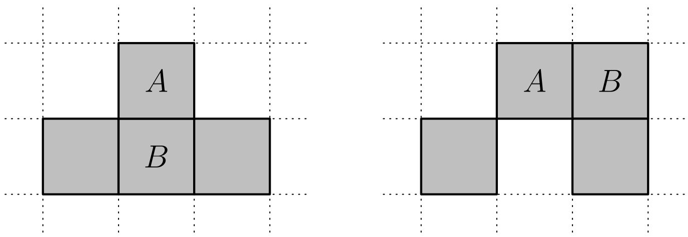
2. Муравьи и жуки-носороги собрались на поляне и решили выяснить, кто из них сильнее. Оказалось, что двухсотая часть всех муравьёв смогли поднять всех жуков, а двухсотая часть всех жуков смогли поднять всех муравьёв. При этом один муравей может поднять груз, вес которого в 50 раз превышает вес самого муравья, но не больше. Докажите, что жук-носорог может поднять груз, вес которого в 800 раз превышает вес самого жука-носорога. Предполагается, что все муравьи одинаковы и все жуки-носороги одинаковы.

Решение. Пусть вес всех муравьёв A, вес всех жуков B и один жук может поднять не более x жуков. Тогда двухсотая часть муравьёв может поднять вес $\frac{50}{200}A$. Следовательно, вес всех жуков не превосходит этой величины: $\frac{50}{200}A \geqslant B$. Аналогично, $\frac{x}{200}B \geqslant A$. Поэтому $\frac{50}{200}\frac{x}{200}A \geqslant A$ и $x \geqslant 800$. Значит, максимальная грузоподъёмность одного жука не меньше 800. Поэтому один жук гарантированно сможет поднять 800 жуков.

3. Можно ли закрасить на клетчатом листе несколько клеток так, чтобы у каждой закрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед по стороне, а среди закрашенных соседей по углу и по стороне соседей по углу было бы вдвое больше?

Решение. Ответ: нельзя.

Из условия следует, что у каждой клетки может быть 2 или 4 соседа по углу. Посмотрим на самую верхнюю закрашенную клетку A (если таких несколько, то выберем любую). Её соседи по углу могут быть только снизу. Следовательно, она имеет два соседа по углу и одного по стороне. Обозначим соседа по стороне за B. Если B находится снизу от A, то у B уже три соседа по стороне, что невозможно. Если B находится сбоку от A, то у B минимум два соседа по стороне, то есть четыре по углу. Но A и B это самые верхние клетки, противоречие.



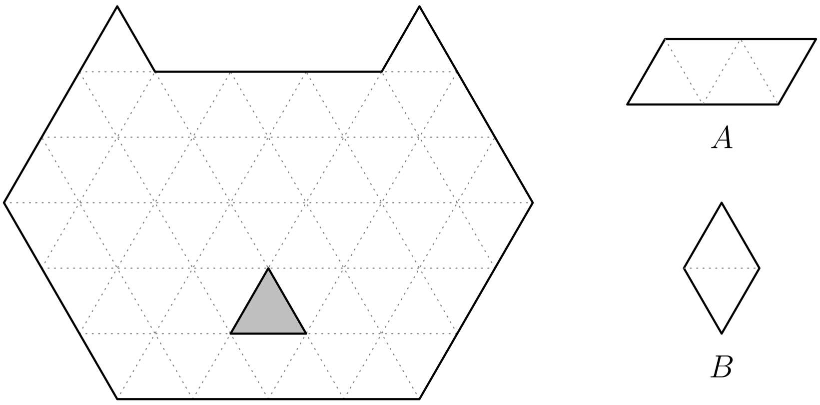
4. На доске написано число 0. За ход разрешается дописать на доску два (ещё не написанных там) различных целых числа от $-N$ до N, сумма которых равна одному из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от N)?

Решение. При нечётном N выиграет первый игрок, при чётном — второй.

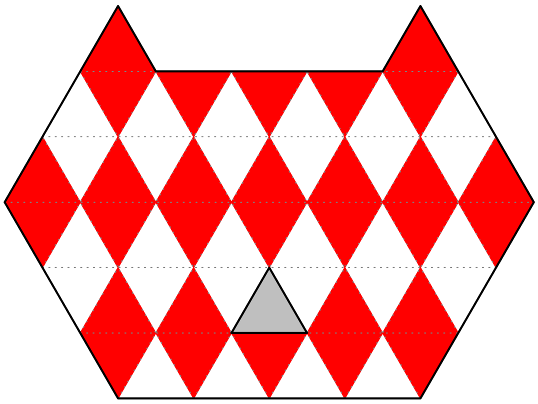
Стратегия в обоих случаях будет одинаковая. За выигрышную сторону будем ходить так, чтобы после нашего хода множество выписанных на доске чисел было бы симметрично относительно нуля. То есть если соперник на предыдущем ходу взял пару $(-a, a)$ или же это первый ход в игре, то мы берём пару $(-b, b)$. Если же соперник взял пару $(a, -b)$ $(a \neq b)$, то мы возьмём пару $(-a, b)$. Докажем, что при такой стратегии у обоих игроков всегда будет ход и в итоге все числа от $-N$ до N на доске появятся. Тогда при нечётном N последний ход будет за первым игроком, а при чётном — за вторым (то есть у того игрока, за которого играем).

Заметим, что после каждого нашего хода на доске выписаны несколько пар противоположных чисел и 0. Следовательно, если выписаны не все числа, то наш соперник всегда может выписать пару $(-a, a)$, а мы в ответ пару $(-b, b)$. Предположим, что наш соперник соперник выписал пару $(a, -b)$ $(a \neq b)$, где $a - b = c$. Тогда до его хода число c было уже вписано, откуда следует, что выписано и число $-c$. То есть своим ходом мы можем выписать пару чисел $(-a, b)$, так как $-a + b = -c$. То есть при такой стратегии у обоих игроков всегда будет ход, что и требовалось доказать.

5. Кот Матроскин вырезал из треугольной бумаги несколько фигурок типов A и одну фигурку типа B (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Затем он сложил из них мордочку кота без серого треугольника (это носик кота). Докажите, что фигурка типа B может быть расположена только вертикально (как на рисунке, не повёрнутая).



Решение. Рассмотрим следующую раскраску.



На раскраске 30 клеток закрашено и 28 клеток не тронуто. Причём каждая фигурка типа A в такой раскраске содержит по 2 клетки каждого из цветов. Значит, фигурка типа B будет состоять из двух закрашенных клеток, следовательно она расположена вертикально.

6. В десятичной записи двух чисел использованы только две различные цифры. В десятичной записи их суммы все цифры попарно различны. Какова наибольшая возможная такая сумма?

Решение.

Ответ: $829765104 = 828882222 + 882882$.

Обозначим числа из условия через X и Y (пусть $X \geqslant Y$). Предположим, что в десятичной записи X и Y встречаются только цифры a и b (пусть $a > b$), а $X + Y > 829765104$. При сложении чисел X и Y столбиком перенос через десяток может быть или на 1, или его вообще нет. Следовательно, цифрами в числе $X + Y$ могут быть только последние цифры чисел $a + a, a + b, b + b, a + a + 1, a + b + 1, b + b + 1$ (если в этом разряде есть цифры и в X, и в Y), $a, b, a + 1, b + 1, 1$ (если в этом разряде есть цифра только в X). Так как в $X + Y$ хотя бы 9 знаков, а в разрядах, где есть цифры и в X, и в Y есть не более 6 вариантов цифр, то в Y не более 6 цифр, а в X хотя бы 9. Заметим, что среди 7-ой, 8-ой и 9-ой цифр числа $X + Y$ не могут быть три подряд переноса через десяток, так как иначе в этих разрядах в числе X стоят 9, что невозможно. Следовательно, среди цифр $X + Y$, стоящих в разрядах, где закончились цифры Y, могут стоять только числа $a, b, a + 1, b + 1$. Если $a = 9$, то последние цифры чисел $a + b + 1$ и b, а также $a + a + 1$ и a совпадают, откуда следует, что в $X + Y$ не более 8 цифр, что меньше нашего ответа.

Далее считаем, что $8 \geqslant a > b$. Вспомним, что в Y не более шести цифр. Так как $8 \geqslant a > b$, то в $X + Y$ в 7 цифре с конца ещё может произойти переход через разряд (и появится или $a + 1$, или $b + 1$), а в следующих цифрах с конца уже перехода не будет (то есть эти цифры или a или b). Так как в числе $X+Y$ хотя бы 9 знаков, то в $X+Y$ ровно 9 знаков, первые две цифры равны a и b, а третья или $a+1$ или $b+1$. Также отсюда следует, что в Y ровно 6 цифр.

Так как $X+Y > 829765104$, а $8 \geqslant a > b$, то $a=8$, $b \geqslant 2$ и все цифры числа $X+Y$ это последние цифры чисел $a+a, a+b, b+b, a+a+1, a+b+1, b+b+1, a, b$ и одного из чисел $a+1$ или $b+1$. То есть это последние цифры чисел $6, 8+b, 2b, 7, 9+b, 2b+1, a, b$ и одного из чисел 9 или $b+1$. Так как это все различные цифры, а $7 \geqslant b \geqslant 2$, то b может быть равно 5 или 2. В первом случае в числе $X+Y$ в каждом разряде со второго по шестой будет переход через десяток, что невозможно, так как в этом случае две из цифр $a+a$, $a+b$ и $b+b$ отсутствуют. Значит $b=2$.

Мы поняли, что $X+Y = 82{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}$. Максимальные значения 3-ей, 4-ой, 5-ой и 6-ой цифр это 9, 7, 6 и 5. Так как $X+Y > 829765104$, то $X+Y = 829765{*}{*}{*}$. Пусть $X = 828x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $Y = y_1y_2y_3y_4y_5y_6$. Тогда $\{x_1, y_1\} = \{8, 8\}$, $\{x_2, y_2\} = \{8, 8\}$, $\{x_3, y_3\} = \{2, 2\}$, причём в последней паре был переход через разряд. То есть $\{x_4, y_4\} = \{2, 8\}$. В оставшихся двух разрядах возможен только один вариант: $\{x_5, y_5\} = \{2, 8\}$ и $\{x_6, y_6\} = \{2, 2\}$. То есть $X+Y = 829765104$, противоречие.

7. По кругу написаны натуральные числа от 1 до 15 (именно в таком порядке). За ход разрешается взять два числа x и y, между которыми стоит ровно одно число, и прибавить к x сумму двух соседей числа y, а из y вычесть сумму двух соседей числа x. Можно ли через некоторое количество шагов сделать все числа равными?

Решение. Ответ: нельзя.

Рассмотрим сумму произведений всех пар соседних чисел. Докажем, что она не изменяется. Действительно, пусть в кругу идут числа $\ldots\, a\, x\, b\, y\, c\, \ldots$, и мы прибавляем к x сумму $b+c$, а из y вычитаем $a+b$. Тогда из произведений пар соседних чисел поменялись только ax, xb, by и yc, причём изменились они суммарно на $a \cdot (b+c) + b(b+c) - b(a+b) - c(a+b) = 0$.

Предположим, что в конце все числа стали равны t. Так как сумма произведений всех пар соседних чисел не поменялась, то $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 14 \cdot 15 + 15 \cdot 1 = 15t^2$. Но левая часть при делении на 3 даёт такой же остаток, что и число $1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 13 \cdot 14$, которое в свою очередь даёт остаток 1 при делении на 3, так как каждое слагаемое даёт остаток 2. Значит, левая часть равенства не делится на 3, а правая делится, противоречие.

7 класс

1. Вася написал на доске трёхзначное число. Петя заметил, что у этого числа одинаковые остатки от деления на 8 и 15. А Маша заметила, что его последняя цифра равна сумме первых двух. Какое число мог написать Вася? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Решение. Ответ: $123, 246, 606$.

Решение: Обозначим Васино число за $\overline{abc}$, а его остаток от деления на 8 и 15 за r. Тогда $\overline{abc} = 15q_1 + r = 8q_2 + r$. Числа 8 и 15 взаимно просты, значит, $\overline{abc} - r \,\vdots\, 120$.
Тогда $\overline{abc} - r$ равно одному из чисел: 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, 960. Далее числа уже более чем трёхзначные. Число r — остаток от деления на 8. То есть $r < 8$ и является последней цифрой числа: $r = c$. Тогда, складывая первые цифры чисел 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, 960 находим $\overline{abc}$.

Подходят варианты, в которых $a + b = r < 8$: $123, 246, 606$.

2. Из пяти внешне неразличимых монет две нестандартны — одна фальшивая, которая весит легче настоящей, а вторая — монета-обманщик. Когда такая монета лежит на одной из чаш весов, весы показывают «невозможный» результат — не такой, как если бы на её месте была настоящая монета, и не такой, как если бы вместо неё была фальшивая. Как за три взвешивания определить, какая монета фальшивая и какая — обманщик?

Решение.

Первыми двумя взвешиваниями сравниваем монеты 1 и 2, а также 3 и 4. Если есть монета-обманщик, то с ней нет равенства. Если есть фальшивая, то равенства на весах тоже не будет. При этом в одном из взвешиваний точно участвовала фальшивая монета или монета-обманщик. (То есть двух равенств быть не может.)

Рассмотрим случаи:

1. Если есть равенство, например, 1 и 2 монеты, то это настоящие монеты. Пусть при взвешивании 3 оказалась легче 4. Заметим, что если монеты 3 и 4 обе нестандартные, то 4 может быть только фальшивой. Тогда взвешиваем монеты под номерами 4 и 1. Если равенство, то 4 настоящая и тогда 3 точно фальшивая, а 5 монета-обманщик. Если показывает, что меньше весит настоящая, то 4 — монета-обманщик и 5 фальшивая. Если наоборот настоящая тяжелее, то 4 фальшивая, а 3 монета-обманщик.

2. Если равенства нет, то 5 — настоящая. Тогда сравним ее с первой монетой. Результат этого взвешивания определяет типы монет в паре 1 и 2. И соответственно, типы монет в паре 3 и 4.

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, L — точка на стороне BC. Прямая l, проходящая через L, пересекает отрезок AC в точке Y, а продолжение отрезка AB за точку B — в точке X. Что больше: XY или $BX + CY$?

Решение. Ответ: отрезок XY больше суммы отрезков $BX + CY$.

По условию $AB > AC$, значит, $\angle ACB > \angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC < 90$ и $\angle CBX > 90$ как смежный $\angle ABC$. Откуда $LX > BX$.

Угол ABC внешний для треугольника LBX, значит, $\angle ABC = \angle BLX + \angle BXL$. Тогда $\angle BLX < \angle ABC$. Углы BLX и YLC вертикальные: $\angle BLX = \angle YLC$. Получаем $\angle YLC = \angle BLX < \angle ABC < \angle ACB$. В треугольнике LYC напротив большего угла лежит большая сторона: $LY > CY$.

А значит, $BX + CY < LX + LY = XY$.

4. В стране 2023 города, некоторые из них соединены дорогами с двусторонним движением. Правительство хочет закрыть некоторые из дорог на ремонт. Известно, что если закрыть любые две дороги, то из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что можно закрыть какие-то три дороги, выходящие из какого-то одного города, и по-прежнему из него можно будет проехать в любой другой город.

Решение. После удаления любых двух ребер связность графа сохраняется. Значит, степень каждой вершины хотя бы 3. Поскольку в графе нечетное число вершин, все вершины не могут быть степени 3. Тогда есть вершина степени хотя бы 4.

Посмотрим на вершину степени хотя бы 4. Удалим все ребра, выходящие из нее. Если оставшаяся часть — связный граф, то можно удалить любые 3 ребра, выходящие из этой вершины, и граф останется связным. Если граф распался на несколько компонент связности, то в каждую компоненту должно идти не менее трех ребер (иначе при удалении двух ребер, ведущих в эту компоненту, связность нарушается). Удалим по два ребра, ведущие в каждую компоненту. Связность сохранилась, и было удалено хотя бы 4 ребра.

5. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди выписывают на доску либо сумму, либо разность последнего и предпоследнего из выписанных чисел. Игра заканчивается, когда на доску выписано 2023 числа. Победитель определяется остатком числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ от деления на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*). Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, остаток 2 — победу Мистера Икс и вечное лето, а остаток 0 — боевую ничью. Кто побеждает при правильной игре, если Королева ходит первой?

Решение. Ответ: ничья. Докажем, что Королева и Мистер Икс могут не проиграть. Все рассуждения в задаче проводятся с числами по модулю три. То есть с числами 0, 1 и 2.

Королева: Расписав таблицу для последних трех ходов, заметим, что если на 2021 месте будет число 1 или 2, то Королева сможет не проиграть. Тогда, играя за Королеву, мы будет ставить своим ходом не нулевое число. Это всегда возможно, потому что на любом ходу у нее есть два варианта. Единственный вариант существует только для такой ситуации:

$$a + b \equiv b - a \mod 3 \to a \equiv -a \mod 3 \to a = 0.$$

Мистер ИКС: Давайте мистер ИКС (тоже) будет поддерживать не 0 на своих ходах (то есть просто не будет писать на доску 0, он так может, потому что у него всегда есть выбор). Тогда пусть на 2021 месте Королева написала x, а перед этим был написан $y \neq 0$. Тогда если $x = 0$, то можно просто написать на доску $0 + y = y$, после чего королева напишет неважно что и получится $0 \cdot z - y^2 = -1 = 2$, и мистер ИКС не проиграет. Если же $x \neq 0$, то $x \neq -x$, и при этом остатки $x - y, x, x + y$ попарно различны,а значит один из остатков $x - y$ и $x + y$ равен $-x$. Тогда он должен его и выписать.Тогда королева напишет либо $-x + x = 0$, либо $-x - x = x$. В первом случае значение искомой величины будет $x \cdot 0 - (-x)^2 = -x^2 = -1 = 2$, а во втором — $x \cdot x - (-x)^2 = 0$. В любом случае Мистер ИКС не проиграл.

6. Круг разбит на 400 секторов. В одном из секторов стоит фишка. За один ход её можно переставить в соседний или в противоположный сектор. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы не было двух соседних непосещённых секторов?

Решение. Ответ: 299. **Пример:** $1 - 201 - 202 - 203 - 3 - 4 - 5 - 205 - 206 - 207 - \ldots - 195 - 196 - 197 - 397 - 398 - 399 - 199$.

Оценка. Разобьем (удачно) сектора на 50 восьмерок (8-ка — это две диаметрально противоположные четверки подряд идущих секторов) и убедимся, что во всех восьмерках кроме, может быть, одной, закрашено не менее 6, в оставшейся не менее 5. Пусть первый ход-другой, не умаляя общности, выглядит как 1-2 или 1-201-202. Тогда пусть одна из восьмёрок будет 1,2,3,4, 201,202,203,204; дальнейшее разбиение на восьмёрки определяется однозначно.

Отметим, что в каждой 4-ке не менее двух закрашено, причем если закрашено 2 и оба — не конечные пункты маршрута, то это два средних (соединенных ходом). В этом последнем случае легко видеть, что если и в противоположной 4-ке нет концов пути, то вся та четверка закрашена. Отсюда получаем, что в 8-ках, не содержащих концов, закрашено не менее шести секторов. Так же, но чуть внимательней, убеждаемся в том, что и в начальной 8-ке закрашено не менее 6. Если в ней лежит второй конец маршрута, то всё уже хорошо, иначе надо посмотреть на содержащую его другую 8-ку и убедиться, что там закрашено не менее 5.

7. У портного есть 11 одинаковых 10-метровых рулонов ткани и 5 клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

Решение. Будем рассуждать не в метрах, а в долях рулона. Мы должны выдать пятерым по $\frac{11}{5}$, при этом не используя совсем маленьких дробей.

Оптимальный раздел таков: двое получат $\frac{1}{2}+3\cdot\frac{17}{30}$, еще двое по $3\cdot\frac{13}{30}+2\cdot\frac{9}{20}$, один получает 4 куска по $\frac{11}{20}$ рулона. (Таким образом, четыре рулона режутся на $\frac{9}{20}+\frac{11}{20}$, шесть на $\frac{13}{30}+\frac{17}{30}$, один строго пополам. Наименьшим куском является $\frac{13}{30}$ рулона, то есть $4\frac{1}{3}$ метра)

Оценка: ни один рулон нельзя делить на три и более частей (иначе размер какой-то будет меньше $\frac{1}{3}$). Если какой-то рулон используется целиком, то его можно, не ухудшив результат, поделить на две равные части. Значит, оптимальное решение — каждый рулон делить на 2 куска, всего 22 куска.

Если кто-то получает три или менее кусков — какой-то из них будет длиннее $\frac{11}{15}$, а значит, обрезок от этого куска будет слишком короток. Если кому-то достается 6 или более кусков — какой-то кусок будет слишком коротким. Значит, дележ должен быть таким: двое получают по 5 кусков, а трое — по 4 куска.

Из 22 кусков 11 имеют длину, меньше или равную $\frac{1}{2}$. Тем двоим, кто получает по 5 кусков, могут достаться не более 10 из них, то есть как минимум один достанется тому, кто получает 4 куска. Остальные три доставшиеся ему куска в сумме имеют длину не менее $\frac{11}{5}-\frac{1}{2}=\frac{17}{10}$; среди них есть кусок длины не менее $\frac{17}{30}$. Обрезок от этого куска имеет длину не более $\frac{13}{30}$, что и требовалось.

8 класс

1. На диаметре AB построена окружность с центром O. На ней отмечены точки D и C так, что хорда DC пересекает диаметр AB в точке P, а $\angle AOD = 3\cdot\angle BOC$. Докажите, что $OP > \frac{AB}{4}$.

Решение. Пусть $\angle BOC=\alpha$, тогда $\angle BOD = 180-3\alpha$ и $\angle DOC = 180-2\alpha$. Значит треугольник DOC — равнобедренный с углом α при основании, а значит, треугольник POC также равнобедренный. По неравенству треугольника

$$2\cdot PO > OC = R = \frac{AB}{2}.$$

2. На вилле в Лапландии за круглым столом сидели 100 человек: рыцари и шпионы. Рыцари всегда говорят правду и носят одинаковые носки. Шпионы говорят правду друг про друга, а про рыцарей врут, носки у шпионов могут быть какие угодно. У каждого за столом спросили сначала, одинаковые ли носки у соседа слева, а потом — разные ли носки у соседа справа. По одному из вопросов услышали 60 утвердительных ответов. Сколько утвердительных ответов было по второму вопросу?

Решение. Ответ: 40. Давайте рассмотрим ситуацию, когда все — и шпионы, и рыцари — одеты в одноцветные носки. На первый вопрос «нет» ответили шпионы про рыцарей. Все остальные сказали «да». На второй вопрос рыцари и шпионы разделились на такие же группы, только ответы оказались противоположными: шпионы про рыцарей сказали «да», все остальные ответы — «нет».
Теперь осталось разобраться, что количество пар Ш->Р и Р<-Ш одинаково. Заметим, что обе этих величины равны количеству групп шпионов, то есть равны между собой.
Посмотрим, как изменятся ответы, когда один шпион поменяет одинаковые носки на разные. Заметим, что и рыцарь, и шпион скажут про шпиона правду. Значит, на один вопрос ответ «да» изменится на ответ «нет», а на второй — наоборот. Следовательно, количество ответов «нет» на первый вопрос такое же, как и количество ответов «да» на второй.

3. Санта-Клаус проводит «Уникальную Одноразовую Новогоднюю Лотерею». Он один раз выбирает натуральные числа a и b, $a > b$, а затем компьютер автоматически для каждого целого x нумерует числом $\frac{29x+a}{41x+b}$ какой-то из подарков на складе Санты. Может ли Вовочка заранее выбрать для себя какое-то число, которым точно будет пронумерован один из подарков (независимо от изначального выбора a и b)?

Решение. Условие просит существование дроби $\frac{p}{q}$, которая окажется на подарке для какого-то x при любых a, b. Немного преобразуем это условие:

$$\frac{29x+a}{41x+b} = \frac{p}{q}; \qquad x(29q - 41p) = bp - aq.$$

Получается, что если взять $29q - 41p = 1$, то x будет выражен в явном виде. Выражение $29 \cdot 17 - 12 \cdot 41 = 1$ следует из линейного представления НОДа.

Ответ: $\frac{12}{17}$ (что является датой олимпиады). Если же решить диофантово уравнение, то получится, что $p = 12 + 29k$; $q = 17 + 41k$. То есть ближайшие ответы, которые могут получить дети: $-\frac{17}{24}, \frac{41}{58}$.

4. Снежная Королева и Мистер Икс играют в игру, выписывая числа на доску по следующим правилам. Первое число каждый выписал произвольным образом, а затем они по очереди пишут либо сумму, либо разность между последним и предпоследним из выписанных чисел (из последнего вычитается предпоследнее). Игра заканчивается, когда на доску выписаны 2023 числа. Победитель определяется остатком от деления числа $n_{2021} \cdot n_{2023} - n_{2022}^2$ на 3 (n_{2021} — 2021-*е выписанное на доску в ходе игры число.*) Остаток 1 означает победу Снежной Королевы и вечную зиму, 2 — победу Мистера Икса и вечное лето, а 0 — боевую ничью. Каким будет результат при правильной игре, если Королева ходит первой?

Решение. Ответ: ничья. Докажем, что Королева и Мистер Икс могут не проиграть. Все рассуждения в задаче проводятся с числами по модулю три. То есть с числами 0, 1 и 2.

Королева: Расписав таблицу для последних трех ходов, заметим, что если на 2021 месте будет число 1 или 2, то Королева сможет не проиграть. Тогда, играя за Королеву, мы будет ставить своим ходом не нулевое число. Это всегда возможно, потому что на любом ходу у нее есть два варианта. Единственный вариант существует только для такой ситуации:

$$a + b \equiv b - a \mod 3 \rightarrow a \equiv -a \mod 3 \rightarrow a = 0.$$

Мистер ИКС: Давайте мистер ИКС (тоже) будет поддерживать не 0 на своих ходах (то есть просто не будет писать на доску 0, он так может, потому что у него всегда есть выбор). Тогда пусть на 2021 месте Королева написала x, а перед этим был написан $y \neq 0$. Тогда если $x = 0$, то можно просто написать на доску $0 + y = y$, после чего королева напишет неважно что и получится $0 \cdot z - y^2 = -1 = 2$, и мистер ИКС не проиграет. Если же $x \neq 0$, то $x \neq -x$, и при этом остатки $x - y, x, x + y$ попарно различны,а значит один из остатков $x - y$ и $x + y$ равен $-x$. Тогда он должен его и выписать.Тогда королева напишет либо $-x + x = 0$, либо $-x - x = x$. В первом случае значение искомой величины будет $x \cdot 0 - (-x)^2 = -x^2 = -1 = 2$, а во втором — $x \cdot x - (-x)^2 = 0$. В любом случае Мистер ИКС не проиграл.

5. У портного есть 11 одинаковых десятиметровых рулонов ткани и пять клиентов. Он может резать рулоны на произвольные куски так, чтобы их можно было поровну разделить между клиентами (каждому по 22 метра). Среди всех таких «раскроев» портному надо выбрать тот, в котором размер минимального из получившихся кусков рулона принимает наибольшее возможное значение. Чему равно это значение?

Решение. Будем рассуждать не в метрах, а в долях рулона. Мы должны выдать пятерым по $\frac{11}{5}$, при этом не используя совсем маленьких дробей.

Оптимальный раздел таков: двое получат $\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{17}{30}$, еще двое по $3 \cdot \frac{13}{30} + 2 \cdot \frac{9}{20}$, один получает 4 куска по $\frac{11}{20}$ рулона. (Таким образом, четыре рулона режутся на $\frac{9}{20} + \frac{11}{20}$, шесть на $\frac{13}{30} + \frac{17}{30}$, один строго пополам. Наименьшим куском является $\frac{13}{30}$ рулона, то есть $4\frac{1}{3}$ метра)

Оценка: ни один рулон нельзя делить на три и более частей (иначе размер какой-то будет меньше $\frac{1}{3}$). Если какой-то рулон используется целиком, то его можно, не ухудшив результат, поделить на две равные части. Значит, оптимальное решение — каждый рулон делить на 2 куска, всего 22 куска.

Если кто-то получает три или менее кусков — какой-то из них будет длиннее $\frac{11}{15}$, а значит, обрезок от этого куска будет слишком короток. Если кому-то достается 6 или более кусков — какой-то кусок будет слишком коротким. Значит, дележ должен быть таким: двое получают по 5 кусков, а трое — по 4 куска.

Из 22 кусков 11 имеют длину, меньше или равную $\frac{1}{2}$. Тем двоим, кто получает по 5 кусков, могут достаться не более 10 из них, то есть как минимум один достанется тому, кто получает 4 куска. Остальные три доставшиеся ему куска в сумме имеют длину не менее $\frac{11}{5} - \frac{1}{2} = \frac{17}{10}$; среди них есть кусок длины не менее $\frac{17}{30}$. Обрезок от этого куска имеет длину не более $\frac{13}{30}$, что и требовалось.

6. Дан треугольник ABC. За точку B на луче AB отложен отрезок $BD = AC$. Точка E на плоскости отмечена так, что $\angle BAE = \angle BCA$, $AE = BC$, причём точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно AB. Прямая l проведена через середины отрезков CE и CD. Докажите, что l делит отрезок AB пополам.

Решение.

1. Проведём через C прямую, параллельную DE. Назовём её пересечение с продолжением AD точкой F.

2. Заметим, что $\triangle\ AEC = \triangle\ BCD$. Отсюда следует два важных для дальнейшего решения факта:
   1) $EC = DC$;
   2) $\angle BDC = \angle ECA = \alpha$.

3. Из факта-1 следует, что $\triangle\ EDC$ — равнобедренный. Тогда $\angle CED = \angle EDC = \beta = \angle ECF$.

4. Из комбинации факта-1 и факта-2 следует $\angle DFC = \beta - \alpha = \angle ACF$. Что даёт равнобедренность $\triangle\ AFC$. А значит, $AF = AC = BD$.

5. Теперь заметим, что прямая l, проходящая через середины отрезков CE и CD является средней линией как в треугольнике EDC, так и в FCD, а значит, делит FD и AB пополам.

7. Стая ворон слетелась праздновать Новый год, и каждая принесла с собой по одному куску сыра какого-то конкретного сорта, причём у всех ворон были разные сорта сыра. После этого некоторые пары ворон попробовали друг у друга сыр, при этом свой сыр никакая ворона не пробовала.
Для каждой пары ворон назовём сорт *продегустированным*, если его попробовала ровно одна ворона из этой пары, причём изначально он не принадлежал ни одной из ворон этой пары.
Оказалось, что для всякой пары ворон количество *продегустированных* сортов больше, чем половина от количества всех остальных ворон. Докажите, что ворон в стае нечётное число.

Решение. Изначальная формулировка звучит так: *В компании несколько человек некоторые пары людей дружат. Известно, что для каждой пары людей количество тех, кто дружит ровно с одним из них составляет более половины от числа оставшихся людей. Докажите, что в такой компании нечетное число людей.*

Пойдём от противного. Пусть людей в компании чётное число — $2k + 2$. Пусть A — количество людей, которых знает только один из пары, а B — количество остальных людей. Сделаем двойной подсчёт величины $d = A - B$ для каждой пары. Заметим, что для любой пары $d \geqslant 2$, значит для всего графа $D \geqslant 2 \cdot \binom{2k+2}{2} = (2k + 2) \cdot (2k + 1)$.

С другой стороны, рассмотрим каждого человека в отдельности. Пусть C — люди, с которыми он дружит, а D — все остальные. Тогда для пары вида (c, c) или (d, d) он входит в разность со знаком минус, а для пары (c, d) — со знаком плюс. Тогда для одного человека получается следующая сумма:

$$d \cdot d - \binom{c}{2} - \binom{d}{2} = cd - \frac{c^2 - c}{2} - \frac{d^2 - d}{2} = \frac{c + d}{2} - \frac{(c - d)^2}{2} \leqslant \frac{2k + 1}{2} - \frac{1}{2} = k.$$

Значит, что для всех людей вместе такая разность $D \leqslant (2k + 2) \cdot k$. Противоречие.

9 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.

Решение. Правильный красный шестиугольник и концентрический правильный синий шестиугольник внутри него. Соответствующие вершины шестиугольников соединены синими отрезками.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

Решение. Не умаляя общности, можно считать, что прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 расположены под углами в $60°$ друг к другу. Посмотрим на какой-то цикл как на N-угольник. При углах в $60°$ или $300°$ стороны разного цвета, при углах $120°$ или $240°$ — одинакового. Отсюда углов по $60°$ или $300°$ четное число. Тогда сумма углов в градусах делится на 120, а $180(N-2)$ делится на 120 только при четных N, то есть нечетных циклов в графе нет.

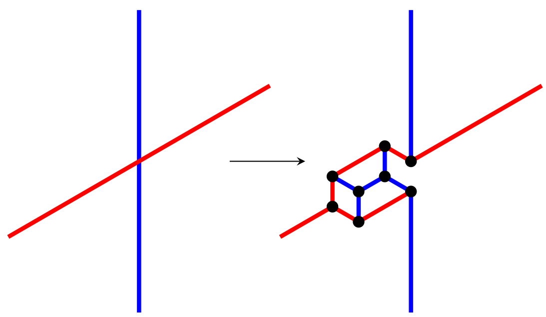
3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

Решение. Пусть в графе n вершин, тогда $3n/2$ ребер, тогда из формулы Эйлера $n/2+2$ граней. Цикл, ограничивающий каждую из граней, не одноцветен, значит, каждая грань содержит уголочек в $60°$, а тогда по крайней мере два таких. Каждый клювик дает два таких уголка. Значит, клювиков не меньше, чем граней, то есть более половины всех вершин.

Также можно обойтись без формулы Эйлера, посчитав суммы степеней вершин во всех красных и синих деревьях.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Решение. См. картинку (на следующей странице).



Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

Решение. Все строки, в которых меньше k единиц, конечно же, дают все варианты, кроме всех единиц, при любом вычеркивании.

2. Приведите пример 3-интересной таблицы для произвольного $n > 3$ и $N = 3n - 2$.

Решение. Берём все монотонные последовательности (их $2n$) и все последовательности с одной единицей (их n). Из них 2 раза посчитаны $10\ldots0$ и $0\ldots01$, итого $3n-2$ строки. Такое описание устойчиво к вычёркиванию, значит, получатся все строки длины 3, кроме 101.

3. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

Решение. Заметим, что при замене всех значений в одном столбце на противоположные условие задачи никак не меняется, поэтому можно считать, что в каждом столбце не больше половины единиц. Теперь давайте мыслить столбец как подмножество множества строк, состоящее из тех строк, у которых в этом столбце единицы. Тогда условие равносильно тому, что для любых двух множеств A и B ровно три из следующих четырёх множеств непусты: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{(A \cup B)}$. Отметим, что в силу того, что все множества имеют размер, не превосходящий $\frac{N}{2}$, множество $\overline{(A \cup B)}$ непусто, потому что тогда и пересечение должно быть пустым, а это запрещено. Это означает, что наши условия таковы: все множества размера не больше $\frac{N}{2}$, никакие 2 множества не являются дополнениями друг друга (что важно только для множеств размера ровно $\frac{N}{2}$), и для любых двух множеств они либо не пересекаются, либо вложены одно в другое (ну и, естественно, все множества попарно различны).

Избавимся от условия про то, что размер хотя бы $\frac{N}{2}$, и будем помнить лишь то, что никакие два множества не содержат в объединении все элементы. Докажем по индукции, что $n \leqslant 2N - 3$. **База:** $N = 3$. Заметим, что никаких множеств, кроме множеств размера 1, быть не может. **Переход.** От $3, \ldots, N-1$ к N. Возьмем набор множеств на $[n]$ и рассмотрим минимальное (по размеру) множество S размера больше 1 (если их несколько, возьмем любое; если такого множества нет, то все множества одноэлементны и $n \leqslant N \leqslant 2N - 3$). Заметим, что кроме одноэлементных подмножеств никакие множества не могут различать элементы S. Выкинем все одноэлементные подмножества внутри S (этим мы потеряли не больше, чем $|S|$ множеств), а теперь стянем все элементы S в один элемент. Получим систему множеств, удовлетворяющую условию задачи для $N - |S| + 1$ строк, то есть в ней не более, чем $2(N - |S| + 1) - 3$ множества. Значит, в исходном наборе множеств не более, чем $2N - |S| - 1$ множеств, а в силу того, что $|S| \geqslant 2$ получаем то, что хотели.

Отметим, что эта оценка является точной.

4. Зафиксируем некоторые n и k ($n > k$). Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица с N строками.

Решение. Докажем, что пример из пункта 1 имеет наибольшее N.

Ослабим условие до того, что при стирании любых $n-k$ столбцов получается не более, чем 2^k-1 различных строк. Будем индукцией по k, потом вложенной по n доказывать, что тогда $N \leqslant \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{k-1} =: F(n,k)$.

База: $k=1$. Тогда в каждом столбце написано не более 1 значения, а значит всего не более чем одна строка. **Переход.** Пусть мы доказали для k (и произвольного n). Докажем для $k+1$. Будем делать это индукцией по n. **База:** $n=k$. Тогда строк не больше, чем $2^k-1=\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\dots+\binom{k}{k-1}$. **Переход.** Пусть для n столбцов строк не больше, чем $F(n,k)$. Пусть столбцов $n+1$. Тогда заметим, что после стирания последнего столбца получается не больше, чем $F(n,k)$ различных строк. Теперь оценим число строк, которые могли получиться дважды после стирания последнего столбца. Сотрем все остальные строки. Заметим, что теперь для любых $k-1$ столбцов из первых n верно, что при стирании всех других из этих n у нас получится не больше, чем $2^{k-1}-1$ различных строк, ведь если получилось 2^{k-1}, то если в исходной таблице оставить эти $k-1$ столбец и еще последний, то получится 2^k различных строк, потому что для каждой из удвоившихся строк в исходной таблице была и такая строка с нулем в последнем столбце, и такая строка с 1 в последнем столбце, так как после стирания последнего столбца таких строк стало 2, а исходно они различные. Тогда удвоившихся строк не больше, чем $F(n,k-1)$ по предположению индукции, а значит всего строк не больше, чем $F(n,k)+F(n,k-1)=F(n+1,k)$, что и требовалось.

Сюжет 3

Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к ω в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке D. Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $\angle ADF=\angle CDE$.

1. Пусть прямая DF пересекает AC в точке F', DE пересекает AB в точке E'. Докажите, что точки E, E', F, F' лежат на одной окружности.

Решение.

Треугольники DAB и DCA подобны (один угол общий, другая пара равных — это вписанный угол и соответствующий угол между хордой и касательной), отрезки DF и DE соответственные при этом подобии, так что $\angle DEC=\angle DFA=\angle E'FF'$, откуда и следует требуемая вписанность

2. Прямые DE и DF совпали. Докажите, что $BF+CE$ больше четверти периметра ABC.

Решение. Равенство углов из предыдущего пункта превращается здесь в $\angle DFA=\angle DF'C$, то есть равны углы AFF', $AF'F$ и $AF=AF'=AE$. С другой стороны, из того же подобия имеем $AE/EC=BF/FA$, то есть в итоге $EC\cdot BF=AE^2$, откуда по неравенству о средних $EC+BF\geqslant 2AE=AE+AF$. То есть $EC+BF$ составляет больше половины от $AC+BC$, а, по неравенству треугольника, $AC+BC$ больше половины от периметра всего треугольника.

3. Докажите, что все окружности AEF проходят через фиксированную точку помимо A.

Решение. Заметим,что $\triangle ADB\cap F\sim\triangle CDA\cap E$, поэтому $AF\cdot AE=BF\cdot CE$. Пусть S точка внутри треугольника ABC такая,что $\triangle SAB\sim\triangle SCA$. Тогда $\triangle SAB\cap F\sim SCA\cap E$, поэтому $\angle SEA=\angle SFB$, то есть точки A, E, F, S всегда лежат на одной окружности.

4. Прямая EF пересекает окружность ω в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов EDF и PDQ совпадают.

Решение. Прямая EF пересекает прямые AD, BC в точках X, Y соответственно. Не умаляя общности, будем считать, что Y лежит на луче BC. Описанная окружность треугольника AEF повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M. Прямая AM пересекает прямую EF в точке T. Заметим,что $\angle MCY = \angle MAF = \angle MEY$ => точки M, E, C, Y лежат на одной окружности, поэтому $\angle MYE = \angle MCE = 180 - \angle XAM$ => точки X, Y, A, M лежат на одной окружности. Тогда $TX \cdot TY = TA \cdot TM = TP \cdot TQ = TE \cdot TF$. Заметим,что окружности, описанные около треугольников DEF и DXY, касаются в точке D, так как биссектрисы углов EDF и XDY совпадают. Следовательно, точка T лежит на их радикальной оси, то есть общей касательной в точке D. Тогда $TD^2 = TP \cdot TQ$, поэтому описанная окружность треугольника DPQ также касается прямой TD. Из этого следует, что биссектрисы углов EDF, XDY и PDQ совпадают.

10 класс

Сюжет 1

Вася нашёл кубический граф (все степени вершин равны трём) и нарисовал его на плоскости без самопересечений так, что все рёбра являются отрезками, параллельными прямым ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, причём рёбра, исходящие из одной вершины, параллельны разным прямым. Петя покрасил каждое ребро в красный или синий цвет так, что если три отрезка образуют «клювик», то центральное ребро одного цвета, а крайние другого, а если «треножку», то все цвета одинаковые.

1. Приведите пример получившейся картинки.

Решение. Правильный красный шестиугольник и концентрический правильный синий шестиугольник внутри него. Соответствующие вершины шестиугольников соединены синими отрезками.

2. Покажите, что Васин граф двудольный.

Решение. Не умаляя общности, можно считать, что прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 расположены под углами в $60°$ друг к другу. Посмотрим на какой-то цикл как на N-угольник. При углах в $60°$ или $300°$ стороны разного цвета, при углах $120°$ или $240°$ — одинакового. Отсюда углов по $60°$ или $300°$ четное число. Тогда сумма углов в градусах делится на 120, а $180(N-2)$ делится на 120 только при четных N, то есть нечетных циклов в графе нет.

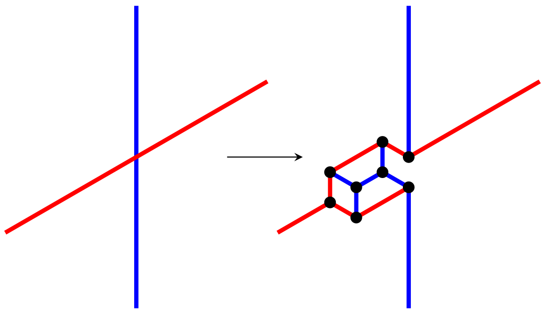
3. Оказалось, что на получившейся картинке нет одноцветных циклов. Покажите, что тогда клювиков больше, чем треножек.

Решение. Пусть в графе n вершин, тогда $3n/2$ ребер, тогда из формулы Эйлера $n/2+2$ граней. Цикл, ограничивающий каждую из граней, не одноцветен, значит, каждая грань содержит уголочек в $60°$, а тогда по крайней мере два таких. Каждый клювик дает два таких уголка. Значит, клювиков не меньше, чем граней, то есть более половины всех вершин.

Также можно обойтись без формулы Эйлера, посчитав суммы степеней вершин во всех красных и синих деревьях.

4. Вася нашёл кубический граф посложнее, и нарисовал его с некоторыми пересечениями ребер. Пете всё равно удалось раскрасить ребра требуемым образом, при этом в его раскраске пересекаются только рёбра разных цветов. Вася накрыл каждое пересечение рублёвой монеткой, под которой не оказалось точек из других рёбер. Докажите, что теперь Вася сможет перерисовать картинку только под монетками так, чтобы она снова удовлетворяла преамбуле (изменив соответствующий граф).

Решение. См. картинку (на следующей странице).



Сюжет 2

Дана таблица с n столбцами и N строками. В каждой клетке таблицы стоит либо 0, либо 1. Одинаковых строк нет. Назовем эту таблицу *k-интересной*, если для любых k столбцов выполнено следующее условие: при стирании всех столбцов, кроме данных, среди получившихся строк найдется ровно $2^k - 1$ попарно различных.

1. Приведите пример k-интересной таблицы для произвольных n и $k < n$ (N можете выбирать по желанию).

Решение. Все строки, в которых меньше k единиц, конечно же, дают все варианты, кроме всех единиц, при любом вычёркивании.

2. Докажите, что для любой 2-интересной таблицы выполняется неравенство $n \leqslant 2N - 3$.

Решение. Заметим, что при замене всех значений в одном столбце на противоположные условие задачи никак не меняется, поэтому можно считать, что в каждом столбце не больше половины единиц. Теперь давайте мыслить столбец как подмножество множества строк, состоящее из тех строк, у которых в этом столбце единицы. Тогда условие равносильно тому, что для любых двух множеств A и B ровно три из следующих четырёх множеств непусты: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{(A \cup B)}$. Отметим, что в силу того, что все множества имеют размер, не превосходящий $\frac{N}{2}$, множество $\overline{(A \cup B)}$ непусто, потому что тогда и пересечение должно быть пустым, а это запрещено. Это означает, что наши условия таковы: все множества размера не больше $\frac{N}{2}$, никакие 2 множества не являются дополнениями друг друга (что важно только для множеств размера ровно $\frac{N}{2}$), и для любых двух множеств они либо не пересекаются, либо вложены одно в другое (ну и, естественно, все множества попарно различны).

Избавимся от условия про то, что размер хотя бы $\frac{N}{2}$, и будем помнить лишь то, что никакие два множества не содержат в объединении все элементы. Докажем по индукции, что $n \leqslant 2N - 3$. **База:** $N = 3$. Заметим, что никаких множеств, кроме множеств размера 1, быть не может. **Переход.** От $3, \ldots, N-1$ к N. Возьмем набор множеств на $[n]$ и рассмотрим минимальное (по размеру) множество S размера больше 1 (если их несколько, возьмем любое; если такого множества нет, то все множества одноэлементны и $n \leqslant N \leqslant 2N-3$). Заметим, что кроме одноэлементных подмножеств никакие множества не могут различать элементы S. Выкинем все одноэлементные подмножества внутри S (этим мы потеряли не больше, чем $|S|$ множеств), а теперь стянем все элементы S в один элемент. Получим систему множеств, удовлетворяющую условию задачи для $N - |S| + 1$ строк, то есть в ней не более, чем $2(N - |S| + 1) - 3$ множества. Значит, в исходном наборе множеств не более, чем $2N - |S| - 1$ множеств, а в силу того, что $|S| \geqslant 2$ получаем то, что хотели.

Отметим, что эта оценка является точной.

3. Докажите, что для любых $n > k \geqslant 3$ существует k-интересная таблица с $N \leqslant 5n^{k-2}$ строками.

Решение. Заметим, что верно неравенство $\sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i} \leqslant 2n^a$ при $n > a \geqslant 2$. В самом деле, $\binom{n}{i} \leqslant n^i$, и $\sum_{i=0}^{a} n^i \leqslant 2n^a$.

Рассмотрим следующий набор строк:

- все строки с не более чем $k-2$ единицами (их $\sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} \leqslant 2n^{k-2}$);
- все строки, у которых сначала идут единицы, а потом нули (включая строку из всех единиц), таких не больше, чем n;
- для каждого l все строки такие, что на позициях $1, \ldots, l$ суммарно стоит не больше, чем $k-3$ единицы, а на позициях $l+1, \ldots, n$ — только единицы. Таких строк не больше, чем $n \sum_{i=0}^{k-3} \binom{n}{i} \leqslant n \cdot 2n^{k-3} = 2n^{k-2}$, потому что для фиксированного l их не больше, чем $\sum_{i=0}^{k-3} \binom{n}{i}$.

Тогда несложно понять, что эти строки на любом наборе столбцов высекают всё, кроме $1 \ldots 101$. При этом всего строк не больше, чем $5n^{k-2}$.

4. Зафиксируем некоторые n и k ($n > k$). Найдите максимальное N, для которого существует k-интересная таблица.

Решение. Докажем, что пример из пункта 1 имеет наибольшее N.

Ослабим условие до того, что при стирании любых $n-k$ столбцов получается не более, чем $2^k - 1$ различных строк. Будем индукцией по k, потом вложенной по n доказывать, что тогда $N \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1} =: F(n,k)$.

База: $k = 1$. Тогда в каждом столбце написано не более 1 значения, а значит всего не более чем одна строка. **Переход.** Пусть мы доказали для k (и произвольного n). Докажем для $k+1$. Будем делать это индукцией по n. **База:** $n = k$. Тогда строк не больше, чем $2^k - 1 = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1}$. **Переход.** Пусть для n столбцов строк не больше, чем $F(n,k)$. Пусть столбцов $n+1$. Тогда заметим, что после стирания последнего столбца получается не больше, чем $F(n,k)$ различных строк. Теперь оценим число строк, которые могли получиться дважды после стирания последнего столбца. Сотрем все остальные строки. Заметим, что теперь для любых $k-1$ столбцов из первых n верно, что при стирании всех других из этих n у нас получится не больше, чем $2^{k-1} - 1$ различных строк, ведь если получилось 2^{k-1}, то если в исходной таблице оставить эти $k-1$ столбец и еще последний, то получится 2^k различных строк, потому что для каждой из удвоившихся строк в исходной таблице была и такая строка с нулем в последнем столбце, и такая строка с 1 в последнем столбце, так как после стирания последнего столбца таких строк стало 2, а исходно они различные. Тогда удвоившихся строк не больше, чем $F(n, k-1)$ по предположению индукции, а значит всего строк не больше, чем $F(n,k) + F(n,k-1) = F(n+1,k)$, что и требовалось.

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

Решение. Пусть описанная окружность треугольника AEF пересекает отрезок DE в точке K. Тогда $\angle AKE = \angle AFE = \angle ABC$, поэтому точки A, B, D, K лежат на одной окружности.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

Решение. Пусть D' симметрична точке D относительно EF. Тогда $\angle ED'C = \angle EDC = \pi - \angle EDC - \angle EDF = \pi - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$, поэтому A, E, F, D' лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AED' = \angle AFD'$. Заметим,что $\angle BD'F = \angle CD'E$ так, как $ED' = EC$ и $FD' = FB$, поэтому точки A, B, C, D' также лежат на одной окружности.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Из условия на равенство углов следует, что описанная окружность треугольника AEF касается прямых DE, DF. Следовательно, средняя линия треугольника DEF, которая параллельна EF, является радикальной осью описанной окружности треугольника AEF и окружности с центром в точке P и нулевым радиусом, поэтому $XP^2 = XA \cdot XC$ и $YP^2 = YA \cdot YE$. Следовательно, $\angle XDF = \angle XAD$ и $\angle YDE = \angle YAD$, то есть $\angle A = \angle XDF + \angle YDE$, но так как $\angle EDF = \pi - 2\angle A$ мы получаем вписанность четырёхугольника $AXYD$.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

Решение. Окружность (DEF) повторно пересекает стороны BC, AC, AB в точках D', E', F' соответственно. Окружность (XYZ) повторно пересекает стороны EF, DF, DE в точках X', Y', Z' соответственно. Окружности $(EX'Z')$ и $(FX'Y')$ повторно пересекаются в точке M. Заметим,что $\angle Y'MZ' = \angle DEF + \angle DFE = \pi - \angle EDF$, поэтому M лежит на окружности $(DY'Z')$. Также $\angle EMF = \angle FMX' + \angle EMX' = \angle FY'X' + \angle EZ'X' = \angle FXY +$

$\angle EXZ = \pi - \angle A$, поэтому M лежит на окружности (AEF). Аналогично M лежит на окружностях $(BFD), (CED)$. Пусть ФЁ — инверсия с центром в точке M и произвольным радиусом. Тогда $\angle\Phi(Y')\Phi(X')\Phi(Z') = \angle M\Phi(X')\Phi(Y') + \angle M\Phi(X')\Phi(Z') = \angle MY'X' + \angle MZ'X' = \angle MFE + \angle MEF = \angle A$. Также $\angle\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F) = \angle FMX' = \angle FY'X' = \angle FXY = \angle AFE = \angle AE'F'$. Аналогично $\angle\Phi(X')\Phi(F)\Phi(E) = \angle AF'E'$. Следовательно, треугольники $AE'F'$ и $\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F)$ подобны. Проделывая аналогичные рассуждения для двух других сторон, мы получаем $\triangle ABC \cup \triangle D'E'F' \sim \triangle\Phi(X')\Phi(Y')\Phi(Z') \cup \triangle\Phi(D)\Phi(E)\Phi(F)$. Следовательно, угол между окружностями $\Phi((X'Y'Z'))$ и $\Phi((DEF))$ равен углу между окружностями (ABC) и (DEF) по подобию, с другой стороны, он равен углу между окружностями $(X'Y'Z')$ и (DEF), так как инверсия сохраняет углы.

11 класс

Сюжет 1

Цель этого сюжета — доказательство следующего утверждения:

Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существует ровно $(p-3)/2$ упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных чисел, для которых $ab + cd = p$ и $\max(c, d) < \min(a, b)$.

Если r — остаток по модулю p, то назовём четвёрку (a, b, c, d), удовлетворяющую условиям выше, *r-четвёркой*, если $c \equiv ra \pmod p$.

1. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $r \in \{2, 3, \dots, p-2\}$.

Решение. Требуется исключить варианты $r = 0, 1, p-1$. Если $r = 0$, то c натуральное кратное p, и тогда $a\,b + c\,d > p$ — противоречие. Если $r = 1$, то $a - c$ кратно p, что противоречит тому, что a, c — различные (т.к. $a > c$) натуральные числа, меньшие p. Если $r = p-1$, то $a + c$ кратно p, откуда (так как $a\,b + c\,d$ кратно p) получаем, что $b - d$ кратно p —такое же противоречие как с a и c при $r = 1$.

2. Докажите, что для данного r существует не более одной r-четвёрки.

Решение. Пусть (a, b, c, d), (a', b', c', d') — две четверки, удовлетворяющие условиям с одним и тем же r. Тогда $a\,c' \equiv a\,r\,a' \equiv c\,a' \pmod p$, аналогично $b\,d' \equiv -r\,d\,d' \equiv b'\,d \pmod p$. То есть $a\,c' - a'\,c$, $b\,d' - b'\,d$ кратны p.

Предположим, что эти разности не равны нулю. Пусть не умаляя общности $a\,c' - a'\,c > 0$, тогда $a\,c' > p > a\,b$, то есть $c' > b$ и тем более $c' > d$. Отсюда получаем, что $|b\,d' - b'\,d| < max(b\,d', b'\,d) < max(c'\,d', b'\,c') = b'\,c' < a'\,b' < p$ откуда (т. к. $|b\,d' - b'\,d|$ кратно p) получаем $b\,d' - b'\,d = 0$ — противоречие.

Пусть теперь одна из исходных разностей равна нулю (не умаляя общности $b\,d' - b'\,d$). Отметим, что из равенств $a\,b + c\,d = p = a'\,b' + c'\,d'$ следует взаимная простота b и d, b' и d'. Поэтому из равенства $b\,d' = b'\,d$ следует $b = b'$, $d = d'$, а из него — $(a - a')b = (c' - c)d$. В силу взаимной простоты b, d имеем $a - a' = d\,x$, $c' - c = b\,x$. При $x > 0$ это противоречит условию $c' < b' = b$, при $x < 0$ — условию $c < b$. Значит $x = 0$, $a = a'$, $c = c'$ — четверки полностью совпадают.

3. Докажите, что если r-четвёрка существует, то $(p-r)$-четвёрки не существует.

Решение. Пусть (a, b, c, d), (a', b', c', d') — две четверки, удовлетворяющие условиям с одним с r и с $r' = p - r$ соответственно. Тогда $a\,c' \equiv -a\,r\,a' \equiv -c\,a' \pmod p$, аналогично $b\,d' \equiv -r\,d\,d' \equiv= -b'\,d \pmod p$. То есть $a\,c' + a'\,c$, $b\,d' + b'\,d$ кратны p.

Пусть $c' \geqslant b$, а значит $c' > c, d$, тогда, аналогично прошлому пункту, $b\,d' + b'\,d < c'\,d' + b'\,c' < c'\,d' + b'\,a' = p$ — противоречие с делимостью на p. Значит, $c' < b$ и, аналогично $c < b'$, $d' < a$, $d < a'$. Тогда $a'\,c + a\,c' < a\,b + a'\,b' < 2\,p$, поэтому из делимости $a\,c' + a'\,c = p$ и аналогично $b'\,d + b\,d' = p$.

Предположим теперь, не умаляя общности, что a — наибольшее из чисел. Вычитая из $a\,b + c\,d$ равное ему $a\,c' + c\,a'$, получаем $a(b - c') = c(a' - d)$, откуда из взаимной простоты a, c получаем, что $a' - d$ делится на a — противоречие с тем, что $a < a'$, $a' - d > 0$.

4. Докажите, что для всякого $r \in \{2, 3, \ldots, p - 2\}$ существует либо r-четвёрка, либо $(p - r)$-четвёрка.

Решение. Рассмотрим на плоскости множество всех векторов (x, y) с целыми координатами x, y такими, что $y \equiv rx \pmod p$ или $y \equiv (p-r)x \pmod p$. Отметим, что это множество вместе с каждым вектором (x, y) содержит также и $(\pm x, \pm y)$. Рассмотрим в нашем множестве вектор с минимальной суммой координат. В силу замечания выше можно считать, что это вектор $u := (a, c)$, где $a, c > 0, a \neq c$ (на осях координат и на биссектрисах углов между ними такой вектор лежать не может, поскольку $2 \leqslant r \leqslant p-1$), если $c \equiv (p-r)a \pmod p$, то переобозначим r и $p - r$. Предположим пока что $a > c$. Рассмотрим прямую ℓ с уравнением $xc - ya = p$, будем искать точку $(d, -b)$ на этой прямой такую, что $d > 0, d < a, d < b, c < b$ — тогда четверка (a, b, c, d) и будет искомой. Заметим, что если $(x, y) \in \ell$, то $(x - a, y - c) \in \ell$.

Прямая ℓ где-то пересекает прямую $y + x = 0$. Пусть точка $(x_0, y_0) \in \ell$ с целыми (x_0, y_0) лежит выше прямой $y + x = 0$, а точка $v_0 := (x_0 - a, y_0 - c)$ — (нестрого) ниже (то есть $x_0 + y_0 > 0 \geqslant x_0 + y_0 - a - c$).

Во-первых, проверим, что $x_0 - a > 0$. В самом деле, в противном случае $x_0 \leqslant a$. Из выбора вектора u имеем $a + c \leqslant |x_0 - a| + |y_0 - c| = a - x_0 + |y_0 - c|$. Если $c \geqslant y_0$, то $a - x_0 + |y_0 - c| = a + c - x_0 - y_0 < a + c$ — противоречие. Если же $y_0 > c$, то $p = x_0c - y_0a < ac - ac < 0$ — снова противоречие.

Итак, $x_0 - a > 0$. Поскольку $(x_0 - a) + (y_0 - c) \leqslant 0$, имеем $y_0 - c < 0$. Если $y_0 \geqslant 0$, то $0 < x_0 - a \leqslant c - y_0 \leqslant c$ и обе координаты вектора v_0 по модулю не больше чем c — это опять противоречит выбору u. Значит, $y_0 < 0$ и $c - y_0 > c$. Теперь выберем наибольшее целое неотрицательное m, при котором $x_0 - a - ma \geqslant 0$. Ясно, что это неотрицательное значение строго меньше чем a. Тогда вектор $v_0 - mu = (x_0 - a - ma, y_0 - c - mc)$ и есть искомый вектор. Действительно, все нужные неравенства уже установлены, осталось только исключить случай $x_0 - a - ma = 0$, но в таком случае из уравнения прямой ℓ получаем $xc - ya = p$, $-(y_0 - c - mc)a = p$, что невозможно в силу того что $a > c > 0$, $-y_0 + c + mc \geqslant 1 + c + mc \geqslant 2$.

Наконец обратимся к случаю $c > a$. В этом случае обозначим $a' = c, c' = a$ и построим точно так же четверку (a', b', c', d') со всеми нужными свойствами, но такую, что, наоборот $a' \equiv rc' \pmod p$. В этом случае, очевидно, (b', a', d', c') будет $(p - r)$-четверкой, что нам подходит.

Сюжет 2

Дан граф $G = (V, E)$ на n вершинах; сопоставим каждой вершине v переменную x_v Пусть T — множество остовных деревьев графа G (то есть поддеревьев, содержащих все вершины). Рассмотрим *остовный многочлен* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \in T} \prod_{v \in V} x_v^{\deg_S v - 1}.$$

Назовём связный граф G *хорошим*, если $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ раскладывается на линейные множители (в частности, если P_G — тождественный ноль), иначе *плохим*.

1. Найдите $P_{K_4}(1, 2, 3, 4)$, где K_4 — полный граф на четырёх вершинах.

Решение. Как угодно можно понять, что $P_{K_4} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$, то есть ответ 100.

2. Докажите, что цикл на пяти вершинах является плохим графом.

Решение. Распишем $P_{C_5} = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2$. Поскольку многочлен P_{C_5} линеен по каждой переменной, получаем, что каждая из переменных живет в только в одной из скобок. Тогда переменные вынуждены разбиться на скобки 2-2-1 или 3-1-1, что дает не больше четырех мономчиков, противоречие.

3. Пусть G — хороший граф, U — некое подмножество его вершин. Граф H состоит из всех вершин, лежащих в U, и всех рёбер графа G, соединяющих эти вершины. Докажите, что граф H тоже хороший.

Решение. Давайте сначала заметим, что можно последовательно выкидывать вершины по одной с сохранением связности, если U связно. (Если несвязно, то просто 0 получился и все).

Для этого нужно подвесить за U и поочередно удалять вершины с самого нижнего уровня. Теперь нужно понять, что при удалении только одной вершины v граф остается хорошим. Для этого подставим 0 в x_v. Получим, что все слагаемые, в которые x_v входило в хотя бы первой степени, обнулились, а значит остались в точности те, где v — висячая вершина. А все такие деревья устроен так: выбрано дерево в графе $G \setminus v$, и потом одна из вершин из окрестности v соединена с v. Тогда многочлен после подстановки нуля равен $P_{G\setminus v}(x_1, \ldots, x_n) \cdot (\sum_{u \in N(v)} x_u)$. Подстановка нуля сохраняет раскладываемость на множители, значит $P_{G\setminus v}$ тоже раскладываемый, значит при удалении вершины v граф остается хорошим.

4. Назовём *раздвоением вершины* v операцию, добавляющую в граф новую вершину v', соединённую ровно с теми же вершинами, что и v. Докажите, что граф, получающийся из одной вершины операциями добавления висячей вершины, раздвоения вершины с добавлением ребра vv' и раздвоения вершины без добавления ребра vv', является хорошим.

Решение.

Лемма 1 (Лемма о раздвоении без добавления ребра)**.** *Пусть дан граф G на n вершинах. Рассмотрим граф G_1, получаемый из G добавлением вершины v_{n+1} и соединением её со всеми вершинами из $N_G(v_n)$, но не с самой v_n. Тогда*

$$P_{G_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n + x_{n+1}) \left(\sum_{v \in N_G(v_n)} x_v \right).$$

Доказательство. Давайте заметим, что любое дерево в графе G устроено следующим образом — на всех вершинах, кроме v_n, берётся некоторый лес, такой, что в каждой компоненте есть хотя бы одна вершина из $N_G(v_n)$, и потом вершина v_n соединяется с ровно одной вершиной из каждой компоненты. Обозначим за L множество всех таких лесов, за $t(K)$ — число компонент связности в лесу K, и назовём $A_1, A_2, \ldots, A_t$ пересечения множества $N_G(v)$ с компонентами связности леса K. Тогда из рассуждения выше

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{K \in L} \left(\prod_{v \in V | v \neq v_n} x_v^{\deg_K(v) - 1} \prod_{i=1}^{t(K)} \left(\sum_{v \in A_i} x_v \right) x_n^{t(K)-1} \right).$$

Теперь давайте поймём, как устроены деревья в G_1. Там мы тоже берём лес, который содержит все вершины, кроме v_n, v_{n+1}, и такой, что каждая его компонента содержит хотя бы одну вершину из $N_G(v_n)$, после чего одна из долей соединяется с обеими вершинами из v_n, v_{n+1}, а каждая из остальных $t(K)-1$ долей — с ровно одной из этих вершин. Тогда в тех же обозначениях получается, что

$$P_{G_1}(x_1, x_2, \dots x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{K \in L} \left(\prod_{v \in V_1 | v \neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \sum_{i=1}^{t(K)} \left(\left(\sum_{v \in A_i} x_v \right)^2 \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left(\sum_{v \in A_j} x_v \right) (x_n + x_{n+1})^{t(K)-1} \right) \right) =$$

$$= \sum_{K \in L} \left(\prod_{v \in V_1 | v \neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \sum_{i=1}^{t(K)} \left(\left(\sum_{v \in A_v} x_v \right) \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{v \in A_j} x_v \right) (x_n + x_{n+1})^{t(K)-1} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{v \in N_G(v_n)} x_v \right) \cdot \sum_{K \in L} \left(\prod_{v \in V_1 | v \neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{v \in A_j} x_v \right) (x_n + x_{n+1})^{t(K)-1} \right).$$

Теперь очевидно, что второй сомножитель равен $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1})$, и лемма доказана. $\square$

Лемма 2 (Лемма о раздвоении с добавлением ребра)**.** *Пусть дан граф G, $|G| = n$. Рассмотрим граф G_2, получаемый из G добавлением вершины v_{n+1} и соединением её со всеми вершинами из $N_G(v_n)$, а также с самой v_n. Тогда*

$$P_{G_2}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}) \left(\sum_{v \in N_G(v_n)} x_v + x_n + x_{n+1} \right).$$

Доказательство. Пусть G_1 — граф из леммы 1. Мы в лемме 1 уже выяснили как устроены деревья в графе G, поэтому нужно разобраться с тем, как они устроены в G_2. Заметим, что они устроены так: мы снова берем лес с такими же условиями, а дальше делаем одно из двух — либо не проводим ребро между v_n и v_{n+1}, и это слагаемое такое же как в G_1, либо проводим, и тогда каждую из долей соединяем с ровно одной из этих вершин. Стало быть, сумма всех первых слагаемых даст нам P_{G_1}, а сумма вторых равна

$$\sum_{K \in L} \left(\prod_{v \in V_2 | v \neq v_n, v_{n+1}} x_v^{\deg_K(v)-1} \prod_{i=1}^{t(K)} \left(\sum_{v \in A_i} x_v \right) (x_n + x_{n+1})^{t(K)} \right) = (x_n + x_{n+1}) P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}).$$

Тогда получается, что

$$P_{G_2}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P_{G_1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + (x_n + x_{n+1}) P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}) =$$

$$= P_G(x_1, x_2, \dots, x_n + x_{n+1}) \left(\sum_{v \in N_G(v_n)} x_v + x_n + x_{n+1} \right),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Сюжет 3

Будем называть треугольник DEF *вписанным* в треугольник ABC, если точки D, E, F находятся на сторонах BC, AC, AB соответственно.

1. Докажите, что если отрезок EF параллелен отрезку BC, то описанные окружности треугольников AEF и ABD пересекаются на прямой DE.

Решение. Пусть описанная окружность треугольника AEF пересекает отрезок DE в точке K. Тогда $\angle AKE = \angle AFE = \angle ABC$, поэтому точки A, B, D, K лежат на одной окружности.

2. Оказалось, что $CE = DE$, $BF = DF$. Докажите, что точка, симметричная D относительно EF, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников ABC и AEF.

Решение. Пусть D' симметрична точке D относительно EF. Тогда $\angle ED'C = \angle EDC = \pi - \angle EDC - \angle EDF = \pi - \angle ABC - \angle ACB = \angle BAC$, поэтому A, E, F, D' лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AED' = \angle AFD'$. Заметим,что $\angle BD'F = \angle CD'E$ так, как $ED' = EC$ и $FD' = FB$, поэтому точки A, B, C, D' также лежат на одной окружности.

3. Пусть $\angle BAC = \angle DEF = \angle DFE$. Средняя линия треугольника DEF, параллельная EF, пересекает AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, D, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Из условия на равенство углов следует, что описанная окружность треугольника AEF касается прямых DE, DF. Следовательно, средняя линия треугольника DEF, которая параллельна EF, является радикальной осью описанной окружности треугольника AEF и окружности с центром в точке P и нулевым радиусом, поэтому $XP^2 = XA \cdot XC$ и $YP^2 = YA \cdot YE$. Следовательно, $\angle XDF = \angle XAD$ и $\angle YDE = \angle YAD$, то есть $\angle A = \angle XDF + \angle YDE$, но так как $\angle EDF = \pi - 2\angle A$ мы получаем вписанность четырёхугольника $AXYD$.

4. В треугольник DEF вписан треугольник XYZ, гомотетичный треугольнику ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается описанной окружности ABC тогда и только тогда, когда касается описанной окружности XYZ.

Решение. Окружность (DEF) повторно пересекает стороны BC, AC, AB в точках D', E', F' соответственно. Окружность (XYZ) повторно пересекает стороны EF, DF, DE в точках X', Y', Z' соответственно. Окружности $(EX'Z')$ и $(FX'Y')$ повторно пересекаются в точке M. Заметим,что $\angle Y'MZ' = \angle DEF + \angle DFE = \pi - \angle EDF$, поэтому M лежит на окружности $(DY'Z')$. Также $\angle EMF = \angle FMX' + \angle EMX' = \angle FY'X' + \angle EZ'X' = \angle FXY + \angle EXZ = \pi - \angle A$, поэтому M лежит на окружности (AEF). Аналогично M лежит на окружностях $(BFD), (CED)$. Пусть ΦЁ — инверсия с центром в точке M и произвольным радиусом. Тогда $\angle \Phi(Y')\Phi(X')\Phi(Z') = \angle M\Phi(X')\Phi(Y') + \angle M\Phi(X')\Phi(Z') = \angle MY'X' + \angle MZ'X' = \angle MFE + \angle MEF = \angle A$. Также $\angle \Phi(X')\Phi(E)\Phi(F) = \angle FMX' = \angle FY'X' = \angle FXY = \angle AFE = \angle AE'F'$. Аналогично $\angle \Phi(X')\Phi(F)\Phi(E) = \angle AF'E'$. Следовательно, треугольники $AE'F'$ и $\Phi(X')\Phi(E)\Phi(F)$ подобны. Проделывая аналогичные рассуждения для двух других сторон, мы получаем $\triangle ABC \cup \triangle D'E'F' \sim \triangle \Phi(X')\Phi(Y')\Phi(Z') \cup \triangle \Phi(D)\Phi(E)\Phi(F)$. Следовательно, угол между окружностями $\Phi((X'Y'Z'))$ и $\Phi((DEF))$ равен углу между окружностями (ABC) и (DEF) по подобию, с другой стороны, он равен углу между окружностями $(X'Y'Z')$ и (DEF), так как инверсия сохраняет углы.