



Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
9 класс



1. Существуют ли такие 2025 последовательных чисел, сумма которых является кубом натурального числа?

2. На каждой из 2025 белых карточек написано натуральное число, так что все числа различны. Андрей смотрит на эти карточки, и если видит, что число на одной карточке вдвое меньше, чем на другой, то красит карточку с меньшим числом в красный цвет, а карточку с большим числом — в синий. Если какая-то карточка покрашена и в красный, и в синий цвет, то она становится фиолетовой. В некоторый момент у Андрея не осталось карточек, которые он мог бы покрасить по указанным правилам. Оказалось, что сумма чисел на синих карточках в пять раз больше суммы чисел на красных. Докажите, что какие-то два числа на карточках отличаются ровно в 8 раз.

3. Вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$ имеет стороны $AB = 32$, $BC = 5$, $CD = 45$, $DA = 60$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4. a, b, c, d — натуральные числа такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{bcd}{a} + \frac{acd}{b} + \frac{abd}{c} + \frac{abc}{d}.$$

Докажите, что число $a + b + c + d$ составное.

5. На плоскости отмечено 1000 точек. Отмеченные точки, находящиеся на расстоянии не более 1 см, соединены ребром. Оказалось, что каждую отмеченную точку можно покрасить в один из 10 цветов так, чтобы любые точки, соединённые ребром, были разных цветов. Докажите, что проведено не более 22500 рёбер.