



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
Второй отборочный тур  
4 октября 2025 года  
7 класс



1. В магазине продаются много видов йогуртов, каждый по своей цене. Известно, что любой покупатель, у которого в кармане миллион рублей, сможет купить 12 бутылок любого йогурта и пять бутылок любого другого йогурта в придачу. Докажите, что любой миллионер сможет купить десять бутылок любого йогурта и семь бутылок любого другого йогурта в придачу.

2. В вершинах куба расставили различные простые числа, большие трёх. Докажите, что можно выбрать грань, на которой сумма каких-то двух чисел, стоящих по диагонали, не делится на 6.

3. В стране 800 городов и нет дорог. Два наследника престола готовятся разделить её на две равные части (по 400 городов). Король, перед тем как сдать дела, хочет всё же провести несколько дорог, но так, чтобы при любом возможном разделе наследникам досталось поровну дорог (наследнику достаётся дорога, если ему достались оба конца этой дороги). Сможет ли он это сделать, построив ровно 3000 дорог?

4.  $a, b, c, n$  — различные натуральные числа. Сумма  $a! + b! + c!$  делится на  $728^n$ , а каждое из слагаемых в этой сумме — не делится. Докажите, что какие то из чисел  $a, b, c$  отличаются менее чем на 15.

Напомним, что  $a!$  — это произведение всех чисел от 1 до  $a$ , т.е.  $a! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot a$ .

5. Последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  задана следующими правилами:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 5$ , и  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  для всех  $n = 3, 4, \dots, 100$ . Сколько натуральных чисел представимы в виде суммы трёх различных элементов последовательности?