



Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
10 класс



1. Боги Тлалок и Юй-Ши играют в следующую игру. За один ход можно пролить на Землю не менее 100, но строго менее 200 литров дождя (количество пролитых литров не обязательно целое). Ходят они по очереди, начинает Тлалок. Выигрывает тот бог, после чьего хода они вдвоём прольют на Землю целое количество тонн (т.е. тысяч литров) дождя. Имеет ли кто-нибудь из них стратегию, позволяющую гарантированно выиграть у соперника?

2. Докажите, что в каждом из чисел $53^2, 533^2, \dots, \underbrace{53\dots3^2}_{10000}$ все цифры, кроме последней, чётные.

3. Окружность с центром O проходит через вершины C, D квадрата $ABCD$, а стороны AD и AB пересекает в таких точках E и F соответственно, что $\angle EOF = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, если $AB = 3$.

4. Числа a, b, c вещественны и $a + b + c = 0$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 > 0$ тогда и только тогда, когда $a^5 + b^5 + c^5 > 0$.

5. На плоскости отмечено 1000 точек.

Отмеченные точки, находящиеся на расстоянии не более 1 см, соединены ребром. Оказалось, что каждую отмеченную точку можно покрасить в один из 10 цветов так, чтобы любые точки, соединённые ребром, были разных цветов. Докажите, что проведено не более 22500 рёбер.

