Олимпиада ЮМШ 2024-25 года

Первый интернет-тур

4 класс

24-1. Разделите квадрат 6×6 клеток на шесть различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками. Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток. (*Д. А. Бикулова*)

24-2. В племени Курумба неделя состоит из нескольких дней (не обязательно из семи). Вождь этого племени несколько раз отвечал на вопрос, какой сегодня день недели. Оказалось, что 15 сентября, 15 октября и ещё хотя бы в один день между этими датами он ответил «Тумба», 24 сентября — «Мумба», 30 сентября — «Лумба». А сколько дней в неделе у племени Курумба? (*А. А. Солынин*)

24-3. Находясь на пересечении Длинного проспекта и Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта. Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одного перекрёстка до следующего) за 8 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром, но обязательно на одном из перекрёстков. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно), а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение? (*А. М. Коршунков*)

24-4. Соня поставила в каждую из клеток квадрата 3×3 рыцаря или лжеца (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Оказалось, что на доске есть как рыцари, так и лжецы, причём каждый из 9 людей может сказать фразу: «Больше половины моих соседей по стороне — рыцари!». Сколько рыцарей на доске? (*С. Е. Розова*)

24-5. Петя умеет делать с числами две операции:

- увеличивать число на 6;
- вписывать 0 между двумя любыми цифрами числа.

Он хочет из числа 66 получить число 66666. Какое наименьшее количество операций ему для этого понадобится? (*С. Е. Розова*)

5 класс

24-6. Петя умеет делать с числами две операции:

- увеличивать число на 18;
- вписывать цифру 8 между двумя любыми цифрами.

Как ему из числа 18 получить число 181716? Достаточно привести один способ. (Ср. с задачей 24-5) (*С. Е. Розова*)

24-7. На какое максимальное количество различных по площади частей, не являющихся прямоугольниками, можно разделить квадрат 6×6 клеток? Все границы между частями должны проходить по сторонам клеток. (Ср. с задачей 24-1) (*Д. А. Бикулова*)

24-8. Находясь на пересечении Длинного проспекта и 1-й Поперечной улицы, Динара увидела на этом же перекрёстке Александра, который шёл по противоположной стороне проспекта. Александр идёт по одной стороне проспекта и проходит каждый квартал (от одной Поперечной улицы до Поперечной со следующим номером) за 9 минут. Динара решила «случайно встретиться» с Александром на перекрёстке Длинного проспекта и 51-й Поперечной улицы, где находится её любимое кафе. Каждый квартал вдоль проспекта Динара может либо пройти за 10 минут, либо пробежать за 6 минут. Кроме того, достигнув очередного перекрёстка, она может поменять направление движения на противоположное (мгновенно), а также перейти проспект (за одну минуту). Динара нетерпеливая и не может стоять на месте. Посреди квартала она не может ни поменять скорость, ни перейти проспект. На пересечение поперечных улиц время не тратится. Сумеет ли Динара осуществить своё намерение? (Ср. с задачей 24-3)

(*А. М. Коршунков*)

24-9. См. задачу **24-4.**

24-10. Дано число $n < 100$. Известно, что числа от 1 до n разбиваются на пары, в которых одно число делится на другое. При каком максимальном n это возможно? (*С. Е. Розова*)

6 класс

24-11. См. задачу **24-6.**

24-12. В классе 12 человек, каждый дружит с шестью другими. Они провели турнир по теннису, в котором каждый сыграл с каждым по разу. Ничьих в теннисе не бывает. Докажите, что кто-то из детей одержал больше побед над друзьями, чем над остальными ребятами. (*М. А. Антипов*)

24-13. В ряд написано несколько натуральных чисел (больше двух), самое левое из них равно сумме всех остальных. Некоторые из чисел увеличили на 10, а остальные уменьшили на 10. Снова получился ряд из натуральных чисел, но теперь самое правое число равно сумме остальных. Сколько чисел могло быть написано? (*М. А. Антипов*)

24-14. Вдоль кольцевой дороги длиной 200 км через каждый километр стоят столбы. У некоторых столбов стоит по инспектору (а больше инспекторов нет). При этом на расстоянии ровно 2 км от любого столба есть как инспектор, так и столб без инспектора. Инспектор расслаблен, если и ровно в километре от него, и ровно в трёх километрах от него есть другой инспектор. Сколько всего расслабленных инспекторов? (*М. А. Антипов*)

24-15. Некоторые из натуральных чисел от 1 до 12 000 000 разбили на пары так, что в каждой паре одно из чисел делится на другое. Докажите, что не менее миллиона чисел остались без пары. (Ср. с задачей 24-10) (*С. Е. Розова*)

7 класс

24-16. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, ..., 8, каждое покрашено в красный цвет. За один шаг Алина может выбрать три различных числа такие, что сумма двух из них равна третьему, и поменять у этих трёх чисел цвет (с красного на синий и наоборот). Алина хочет сделать все числа синими. Помогите Алине осуществить желаемое. (*С. А. Лучинин*)

24-17. В 7 классе учится восемь школьников разного роста. Учитель хочет расставить всех учеников в ряд так, чтобы для каждого ученика было выполнено хотя бы одно из условий:
- справа и слева от этого ученика поровну школьников выше его;
- справа и слева от этого ученика поровну школьников ниже его.

Докажите, что у учителя есть ровно два способа так расставить учеников. (*С. А. Лучинин*)

24-18. Федя выписал на доску 10-значное число-палиндром, в записи которого нет нулей. Серёжа перебрал все способы вычеркнуть 8 цифр из выписанного числа и сложил все 45 полученных двухзначных чисел. Могла ли полученная сумма оказаться простым числом? Напомним, что число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо. (*И. А. Ефремов*)

24-19. Даны натуральные числа $p > 1$ и q. Обязательно ли найдутся различные неотрицательные целые числа a, b, c, d такие, что

$$\left(\frac{p}{q}+a\right)\left(\frac{p}{q}+b\right)=\left(\frac{p}{q}+c\right)\left(\frac{p}{q}+d\right)?$$

(*И. А. Ефремов*)

24-20. В каждой клетке квадрата 6×6 разрешается провести ноль, одну или две диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести так, чтобы никакие три из них не имели общей точки? (*И. А. Ефремов*)

8 класс

24-21. Андрей выписал подряд все числа от 1 до n без пробелов: 123456789101112.... При каком наименьшем n полученное число делится на все числа от 1 до 5? (*А. А. Солынин*)

24-22. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 2 очка, за победу — 3 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 4 очка. Четыре команды набрали 13, 9, 9 и 5 очков. Сколько очков набрала пятая команда? (*А. А. Солынин*)

24-23. Треугольник PQR таков, что $\angle Q = 2\angle R$. В нём проведены биссектрисы PV и QU, пересекающиеся в точке I. На продолжении PQ за точку Q отмечена точка X, такая что $QI = QX$. Докажите, что прямая VX параллельна IQ. (*А. А. Солынин*)

24-24. Некоторые натуральные числа от 1 до $10^{10000000}$ разбили на пары так, что большее число в каждой паре делится на меньшее. Докажите, что не менее 5% всех чисел остались без пары. (*С. Е. Розова*)

25-25. В каждой клетке квадрата 8×8 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее двух лжецов!» Докажите, что рыцарей не более 42. (*А. А. Солынин, К. А. Кноп*)

9 класс

24-26. В каждой клетке квадрата 10×10 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «В клетках, соседних по стороне с моей, не менее трёх рыцарей!» А сколько рыцарей могло быть в этом квадрате? (Ср. с задачей 24-25) (*А. А. Солынин*)

24-27. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Через вершину A провели прямую, отсекающую треть площади восьмиугольника (вершина B попала в меньшую часть). Через какую сторону прошла прямая? (*А. А. Солынин*)

24-28. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни появятся. Докажите, что $p \geq 7$. (*А. А. Солынин*)

24-29. Андрей написал в ряд несколько (не менее двух) подряд идущих трёхзначных чисел в порядке возрастания, получив одно большое число (например, 123124125). Оказалось, что полученное число делится на все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее такое число. (Ср. с задачей 24-21) (*А. А. Солынин*)

24-30. В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохлаждается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней? (*А. А. Солынин*)

10 класс

24-31. Андрей, Борис, Виктор и Геннадий собирали ягоды. Оказалось, что Андрей с Борисом вместе набрали треть от того, что собрали Виктор и Геннадий вместе. Борис и Виктор собрали две трети от собранного Андреем и Геннадием вместе. А Андрей с Виктором — 7/13 от собранного Борисом и Геннадием. Какую долю ягод (от общего количества) собрал Андрей? (*А. А. Солынин*)

24-32. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 3 очка, за победу — 4 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 6 очков. Четыре команды набрали 19, 13, 13 и 7 очков. Сколько очков набрала пятая команда? (Ср. с задачей 24-22) (*А. А. Солынин*)

24-33. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни (хотя бы один) появятся. Найдите наименьшее возможное значение p. (Ср. с задачей 24-28) (*А. А. Солынин*)

24-34. Дан равносторонний треугольник ABC. Пусть M — середина отрезка BC. Точка D симметрична точке A относительно точки B, а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую MD. Докажите, что K лежит на вписанной окружности треугольника ABC. (*К. А. Бельский*)

24-35. На доске написаны десять натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Аня составляет из них все возможные пары из них и для каждой пары a_i, a_j пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеют числа a_i и a_j — таким образом, у Ани на листочке написано 45 чисел. Боря берёт всевозможные тройки чисел a_i, a_j и a_k и пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеет эта тройка — таким образом, Боря записал 120 чисел. Оказалось, что все Борины числа больше 1, а среди Аниных хотя бы 20 являются простыми. Докажите, что хотя бы 20 Бориных чисел также являются простыми. (*А. А. Солынин*)

11 класс

24-36. У Андрея есть две кучки с гирями. В одной кучке неограниченное количество гирь по 1 г, в другой — сто гирь по $\sqrt{n}$ г. Андрей знает, что n — натуральное число, не превосходящее 2024, но не знает, чему оно равно. Всегда ли он сможет при помощи чашечных весов определить, чему равно n? (*А. А. Солынин*)

24-37. На доске написаны 10 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Андрей выписал количество делителей у $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и получил десять подряд идущих чисел. Никита выписал количество общих делителей у a_1 и a_2, у a_1 и a_3, …, у a_9 и a_{10} (всего 45 таких пар) и получил 45 различных степеней двоек. Докажите, что кто-то из них ошибся. (Ср. с задачей 24-35) (*А. А. Солынин*)

24-38. См. задачу 24-30.

24-39. На кривой $xy = 1$ $(x > 0, y > 0)$ даны две точки A и B. Касательные к кривой в точках A и B пересекаются в точке F. Пусть M — середина отрезка AB, O — начало координат. Докажите, что $\dfrac{MO \cdot MF}{MA \cdot MB}$ не зависит от точек A и B. (*К. А. Бельский*)

24-40. Многочлен f таков, что уравнение $f(f(x)) \cdot f(x) = a$ имеет ровно три решения при любом натуральном a от 1 до 40. Докажите, что степень f не менее 6. (*А. А. Солынин*)

Второй интернет-тур

4 класс

24-41. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×7 на семь одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника. (*Жюри*)

24-42. Буратино выписал носом на песке 5 последовательных натуральных чисел. Могло ли среди цифр в этих числах оказаться ровно четыре единицы и три нуля? (Последовательные числа — это числа, каждое из которых больше предыдущего на 1, например: 323, 324, 325, 326, 327.) (*К. А. Кноп*)

24-43. На острове по кругу расположены 22 поселения туземцев, а в центре круга находится хижина вождя. Однажды какие-то 9 поселений на острове захватили варвары. После этого из каждого поселения к вождю было послано по одному гонцу. Все гонцы сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что все туземцы правдивы, а варвары всегда врут. Если поселение захвачено, то гонец оттуда — точно варвар, а если нет, то гонец может быть как варваром, так и туземцем. Верно ли, что есть захваченное поселение, у которого оба соседа не захвачены? (*С. Е. Розова*)

24-44. У Кати есть бочки массой 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 кг (по одной бочке каждой массы). В бочке массой 2 кг находится 18 кг пшена, а остальные пустые. Еще у Кати есть чашечные весы без гирь. Как Кате разделить пшено на три равные части? Высыпать за пределы бочек пшено нельзя. (*С. Е. Розова, Д. А. Бикулова*)

24-45. На первом этаже большого дома находятся четыре гнома весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету за каждый этаж (независимо от того, сколько гномов в нём находится). Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифт можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже? (*С. Е. Розова, Д. А. Бикулова*)

5 класс

24-46. Покажите, как разрезать прямоугольник 6×8 на шесть одинаковых многоугольников так, чтобы хотя бы один из этих многоугольников не имел общих клеток с границей прямоугольника. (Ср. с задачей 24-41) (*Жюри*)

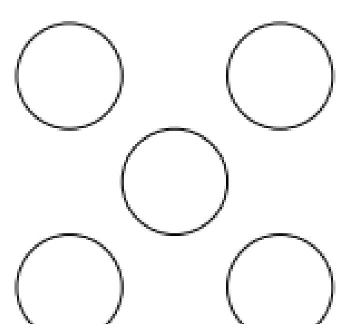
24-47. См. задачу **24-44.**

24-48. На острове по кругу расположены сто селений туземцев. В центре круга находится хижина Вождя. Однажды некоторые селения на острове захватили варвары. После этого из каждого селения к вождю было послано по одному гонцу, и все они сказали: «Оба поселения, соседние с нашим, захвачены». Вождь знает, что туземцы будут говорить ему только правду, а варвары — только врать. Также Вождь понимает, что если селение захвачено, то его гонец — точно варвар, а если селение не захвачено, его гонец может быть как варваром, так и туземцем. Разведка донесла Вождю, что на его острове захвачена ровно половина селений, и у каждого захваченного селения хотя бы одно из соседних тоже захвачено (эта информация достоверная). Сколько туземцев могло быть среди посланных вождю гонцов? Приведите все варианты и докажите, что других нет. (Ср. с задачей 24-43) (*С. Е. Розова*)

24-49. Даны пять последовательных натуральных чисел, каждое из которых больше 30. Для каждого числа на доску выписали количество его натуральных делителей (например, у числа 49 три делителя: 1, 7, 49). Может ли сумма пяти выписанных на доску чисел быть меньше 20? (*С. Е. Розова*)

24-50. На первом этаже большого дома находятся четверо гномов весом 20, 30, 40 и 50 кг соответственно. В этом доме нет лестницы, но есть очень странный лифт. Он не может ехать пустым (даже если его кто-то вызывает с другого этажа), но и перевозить больше 100 кг тоже не может. А ещё он берёт одну золотую монету с каждого гнома за каждый этаж. Гному с весом 20 кг нужно на второй этаж, гному с весом 30 — на третий, гному с весом 40 — на четвёртый, гному с весом 50 — на пятый. В конце лифт можно оставить на любом этаже. Какое наименьшее количество денег они должны заплатить, чтобы каждый оказался на своём этаже? (Ср. с задачей 24-45) (*С. Е. Розова, Д. А. Бикулова*)

6 класс



24-51. Серёжа и Настя играют в игру, по очереди расставляя натуральные числа от 1 до 5 в ячейки X-образной диаграммы справа, начинает Настя. В каждой ячейке может стоять только одно число, в разных ячейках должны стоять разные числа. Сможет ли Настя играть так, чтобы в конце игры суммы чисел в диагоналях были не равны между собой? (*С. А. Лучинин*)

24-52. Семь детей разной силы образуют команды из двух человек (каждый может состоять в нескольких командах). Нельзя, чтобы в одной из команд каждый участник был сильнее, чем каждый в какой-то другой из команд. (Например, если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 4-й и 6-й, то это плохо; но если в одной команде 1-й и 3-й по силе, а в другой 3-й и 6-й, то это допустимо.) Приведите пример, как дети могли образовать 15 команд. (*М. А. Антипов*)

24-53. На доску 20×20 поставили 20 не бьющих друг друга ферзей. Докажите что в каждом угловом квадрате 10×10 стоит хотя бы один ферзь. (*А. В. Грибалко, XXX Турнир Городов*)

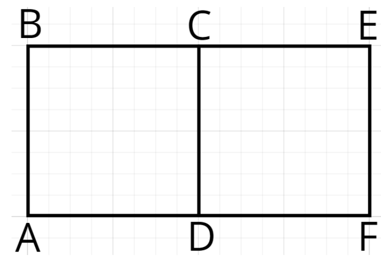
24-54. На доске в ряд написано 12 единиц. Между некоторыми из них можно поставить знак «+», а можно не ставить. Сколькими способами можно расставить плюсы так, чтобы сумма делилась на 30? (*С. В. Сотников*)

24-55. Вася выписал несколько пар натуральных чисел так, что любое число выписано не более двух раз. Петя переписал в блокнот некоторые из Васиных пар так, что любое число, встречавшееся у Васи, встречается у Пети ровно на один раз меньше. Всегда ли Вася может назвать несколько натуральных чисел так, чтобы в каждой из написанных им пар было названо ровно одно число? (*С. В. Сотников*)

7 класс

24-56. См. задачу **24-51.**

24-57. На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $DCEF$, как показано на картинке. По прямоугольнику $ABEF$ с постоянной скоростью по часовой стрелке бегает Крош, а по квадрату $ADCB$ с постоянной скоростью против часовой стрелки бегает Ёжик. Могло ли так случится, что ни в какой момент времени Крош и Ёжик не встретятся, если они бегают бесконечно долго? (*С. А. Лучинин*)



24-58. Все клетки нечётных столбцов доски 8×8 покрашены в чёрный цвет, а все клетки чётных столбцов — в белый. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых больше белых клеток, или тех, в которых больше чёрных клеток? (*С. А. Лучинин*)

24-59. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наибольший делитель, отличный от самого числа, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось более 9500 различных чисел? (*С. А. Лучинин*)

24-60. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Докажите, что можно выбрать 29 человек и выстроить их в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы. (*С. А. Лучинин*)

8 класс

24-61. На доске написано 17 подряд идущих натуральных чисел. Андрей сосчитал сумму их попарных НОКов. (То есть нашёл наименьшее общее кратное первого и второго числа, потом первого и третьего, первого и четвёртого, ..., 16-го и 17-го и всё это сложил.) Могло ли у него получиться число 987654321? (*А. А. Солынин*)

24-62. См. задачу **24-58.**

24-63. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, такой что $AB = 4$, $AD = 8$, $CD = 6$. Точка P — пересечение биссектрис углов A и D. Оказалось, что $PD = 10$, $\angle PBA = \angle PAB$. Найдите PC. (*А. А. Солынин*)

24-64. На доске написано несколько пар положительных чисел. Если пары (a, b) и (c, d) (не обязательно различные) выписаны, то Андрей также пишет и пару $(2ac, ad+bc)$. Через некоторое время Андрей понял, что какую бы пару он ни выписал, отношение первого числа этой пары ко второму равно отношению первого числа пары ко второму в одной из уже выписанных пар. Докажите, что это отношение для всех изначально выписанных пар было одинаковым. (*А. А. Солынин*)

24-65. В компании из 30 человек некоторые люди знакомы между собой (знакомство взаимно). Известно, что среди любых четырёх людей один из них знает хотя бы двух из остальных. Также известно, что любые двое могут передать сообщение от одного к другому, передавая его только через знакомых. Докажите, что можно выстроить их всех в ряд так, чтобы любые два соседа были знакомы. (Ср. с задачей 24-60) (*С. А. Лучинин, П. К. Прозоров*)

9 класс

24-66. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 12000 его наименьший натуральный делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 11999 сумм на доску. Верно ли, что на доске оказалось хотя бы 10000 различных чисел? (Ср. с задачей 24-59) (*С. А. Лучинин, А. А. Солынин*)

24-67. Линейную функцию $g(x) = px + q$ с $p \neq 0$ назовём парадоксальной для квадратного трёхчлена f, если из двух трёхчленов $f(px + q)$ и $pf(x) + q$ один имеет хотя бы один вещественный корень, а другой не имеет. На доске написаны сто квадратных трёхчленов. Оказалось, что любые два квадратных трёхчлена имеют общую парадоксальную функцию. Докажите, что у всей сотни трёхчленов есть общая парадоксальная функция. (*А. А. Солынин*)

24-68. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Оказалось,что $\angle BDC = 60^\circ$ и биссектриса угла ABC перпендикулярна прямой CD. Докажите,что $AD + BD = CD$. (*К. А. Бельский*)

24-69. Яша, Юра и Эдик решили съездить на рыбалку на пруд, но оказалось, что их мотоцикл вмещает лишь двоих, включая водителя. Тогда Яша с Юрой поехали на мотоцикле, а Эдик пошёл пешком. Яша отвёз Юру до пруда, вернулся за Эдиком, и они поехали вместе. По пути Эдик заметил, что Яше не стоило довозить Юру до пруда, а надо было высадить Юру немного раньше. И если бы Яша высадил Юру так, что все трое друзей добрались бы до озера одновременно, то они сэкономили бы 12% времени. Скорости пешеходов постоянны и равны между собой, скорость мотоцикла постоянна и более чем в два раза больше скорости пешехода. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости пешехода? (*А. А. Солынин*)

24-70. В квадрате 9×9 первый, четвёртый и седьмой столбцы покрашены в красный цвет, второй, пятый и восьмой столбцы — в синий, остальные в жёлтый цвет. В левой нижней угловой клетке доски стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Каких способов добраться до правой верхней угловой клетки больше: тех, в которых красных клеток больше, чем синих, или тех, в которых синих клеток больше, чем жёлтых? (Ср. с задачей 24-58) (*А. А. Солынин*)

10 класс

24-71. Вася прибавил к каждому числу от 2 до 10000 его наименьший делитель, отличный от единицы, и выписал все получившиеся 9999 сумм на доску. Найдётся ли какое-нибудь число, которое повторяется хотя бы шесть раз? (Ср. с задачами 24-59 и 24-66) (*С. А. Лучинин, А. А. Солынин*)

24-72. На координатной плоскости с началом координат O отмечены все точки (x, y), удовлетворяющие соотношению $x^2 + x^3 = y^2$. Кирилл взял отмеченные точки A и B, такие что $OA \perp OB$. Докажите, что прямая AB проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора A и B. (*К. А. Бельский*)

24-73. $ABCD$ — квадрат. Внутри него взята точка F, для которой $\angle FAB = \angle FBA = 27^\circ$, а снаружи — точка G такая, что $\angle ABG = \angle DCG = 162^\circ$. Найдите величину угла FDG. (*К. А. Кноп*)

24-74. См. задачу 24-69.

24-75. В стране 30 городов, некоторые города соединены между собой дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города). Известно, что среди любых пяти городов найдутся хотя бы три дороги между этими городами. Докажите, что можно объехать 29 городов, не побывав ни в одном городе дважды. (Ср. с задачами 24-60 и 24-65)

(*С. А. Лучинин, П. К. Прозоров*)

11 класс

24-76. Числа $a < b$ таковы, что их НОД имеет 39 делителей (включая 1 и себя), а их НОК — 77 делителей. Докажите, что $b = a^2$. (*А. А. Солынин*)

24-77. На доске написано несколько линейных функций. Андрей заметил, что если взять две любые написанные функции, перемножить их и взять производную результата, то полученная функция тоже окажется написанной на доске. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку. (Ср. с задачей 24-64) (*А. А. Солынин*)

24-78. У Ани и Бори есть проволочная окружность, и они её решили поделить. Аня поставила на этой окружности метку в случайно выбранной точке, которую Боря не видит. Боря случайным образом выбирает две точки на окружности (выбор второй точки не зависит от выбора первой) и разрезает окружность в этих двух точках. Аня берёт себе ту часть окружности, в которой находится выбранная ей точка. Найдите вероятность того, что Анин кусок окажется длиннее Бориного. (*К. А. Кноп*)

24-79. Дан треугольник ABC. Точка I — центр вписанной окружности, E, F, G — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. На отрезке AF отмечена точка K, такая что $KF = FC$, а на продолжении AC за точку C отмечена точка L, такая что $AK = CL$. Прямая KI пересекается с отрезком EG в точке M. Отрезки IL и BC пересекаются в точке N. Докажите, что угол KMN прямой. (*Я. А. Щербатов*)

24-80. В социальной сети «ВТомате» зарегистрирован ровно миллион пользователей, некоторые из которых являются друзьями. Оказалось, что если пользователи A и B друзья, и у них d_1 и d_2 друзей соответственно, то $d_1 \cdot d_2 \leq 10000$. Владелец сети Паша Помидуров посмотрел, сколько друзей у каждого пользователя, и сложил все эти числа. Могло ли у него получиться число, большее ста миллионов?

(*П. К. Прозоров*)

Заключительный тур

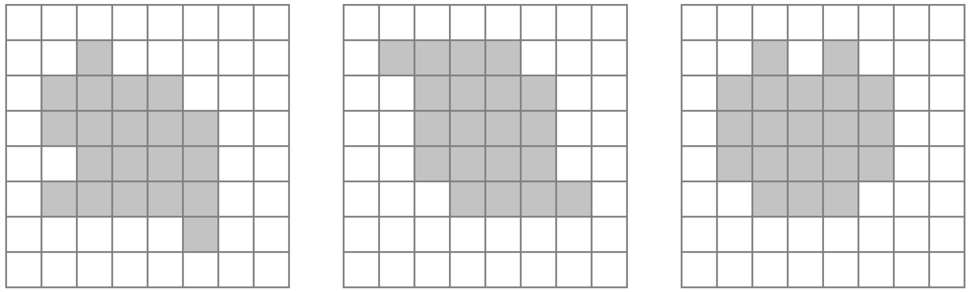
4 класс

24-81. В семье Ивановых возрастом принято считать количество прожитых дней рождения. Например, если человеку 13 лет и его день рождения 28 февраля, то в семье Ивановых ему и будет 13 лет, а если день рождения 29 февраля, то в семье Ивановых ему будет три года. На момент 19 января 2019 года суммарный возраст родителей и трёх детей (если считать возраст по системе Ивановых) равен 95. А на момент 19 января 2026 года суммарный возраст равен 120. 19 января в семье ни у кого дня рождения нет. Определите, сколько членов семьи родились 29 февраля. (*А. А. Солынин, В. Е. Зверев, С. Е. Розова*)

24-82. У Бори есть 1000 карточек: по 100 карточек для каждой цифры от 0 до 9. Боря выкладывал этими карточками натуральные числа, начиная с 1, но остановился, когда не смог выложить очередное число (так как кончились карточки с нужной цифрой). Какое число не смог выложить Боря?

(*Б. Ю. Пичугин*)

24-83. У учительницы есть 12 одинаковых клеточных деталек. Она раздала по 4 детальки Пете, Васе и Тимуру. Каждый из детей сложил из них свою фигуру без наложений (детальки можно крутить и переворачивать). Получившиеся фигурки нарисованы ниже.



Приведите пример, какой формы могла быть изначальная деталька. (*В. Е. Зверев*)

24-84. В понедельник Винни и Пятачок вышли навстречу друг другу из своих домиков. Ровно на середине пути Пятачок остановился и стал ждать Винни, а когда дождался, друзья пожелали друг другу доброго утра и разошлись по домам. Во вторник Винни и Пятачок вновь вышли навстречу друг другу из своих домиков, причем с теми же скоростями, что и в понедельник. Но на этот раз Пятачок не стал останавливаться, а продолжил идти до встречи с Винни. Оказалось, что во вторник с момента старта до момента встречи друзьям потребовалось в три раза меньше времени, чем в понедельник. Во сколько раз Пятачок быстрее Винни? (*В. Е. Зверев*)

24-85. Петя вырезал из доски 5×5 центральную клетку. Вася хочет раскрасить оставшиеся клетки доски в чёрный и белый так, чтобы любой шахматный конь (стоящий на одной из оставшихся клеток) бил одинаковое число чёрных и белых клеток. Сколькими способами Вася это может сделать? (*П. А. Соколов*)

24-86. Дан ребус:

$$\text{ПОЛЗУ} = \text{УПОЛЗ} + \text{УПОЛЗ} + \text{УПОЛЗ}.$$

Докажите, что у него нет решений. (*С. Е. Розова*)

24-87. В королевской гвардии служат рыцари и лжецы. В качестве жалования рыцарь получает одну золотую монету, а лжец — одну фальшивую. 101 фальшивая монета весит как 100 настоящих. Но в этом месяце в бухгалтерии всё перепутали и выдали нужное количество фальшивых и золотых монет, но не тем людям. Всего в гвардии служит 35 человек. На вопрос: «Верно ли, что все монеты, кроме вашей, можно разбить на две кучки равного веса?» ответили «Да» 12 человек. На вопрос: «Вес твоей монеты не меньше, чем обычно?» ответили «Да» 4 человека. Сколько в гвардии лжецов? (*В. Е. Зверев*)

5 класс

24-88. Динара выписала по возрастанию числа от 1 до 2025 так, что они образовали один большой круг. За один ход она может выбрать любое написанное число и прибавить его к каждому из его соседей. Сможет ли Динара через несколько ходов сделать все числа чётными? (*В. Е. Зверев*)

24-89. В семье рыцарей и лжецов Соня самая младшая. У неё есть два любимых вопроса: «Верно ли, что один из твоих родителей рыцарь, а другой лжец?» и «Верно ли, что хотя бы у одного твоего родителя оба родителя рыцари?». Оказалось, что все в Сониной семье, включая Соню, ответили «Да» на оба вопроса. Сколько лжецов могло быть среди 4 поколений родственников Сони, включая ее саму? Приведите все варианты и докажите, что других нет. Братьев или сестёр ни у кого в семье нет. (*В. Е. Зверев*)

24-90. См. задачу **24-83.**

24-91. У Полины есть 5 карточек, на которых она хочет с двух сторон написать цифры от 0 до 9, каждую по одному разу. Ваня поспорил с Полиной, что как бы она ни написала цифры, он всегда сможет сложить из карточек пятизначное число, сумма цифр которого делится на 3. Кто выиграет в споре? (*Д. А. Бикулова, С. Е. Розова*)

24-92. В вершинах квадрата записаны четыре различных натуральных числа, каждое из них делится на разность своих соседей. На сколько сумма наибольшего и наименьшего больше, чем сумма двух остальных? (*М. А. Антипов*)

24-93. В левой нижней клетке доски 8×8 стоит хромая ладья, которая может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Вова покрасил некоторые клеточки доски так, что любой путь из нижнего левого в правый верхний угол проходит не менее чем по 11 покрашенным клеткам. Докажите, что Вова покрасил более половины клеток. (*А. А. Солынин*)

24-94. В турнире на выбывание участвовало 16 команд. Шпион Павел знает номера обоих участников финала, но не знает результат финального матча, а шпион Виктор знает только номер победителя, но не знает, у кого он выиграл. Докажите, что Павел и Виктор могут заранее договориться так, что Павел сообщит Виктору одну цифру: 1 или 2, а в ответ получит одну цифру от 1 до 4, в результате чего Павел определит номер победителя турнира. (*P. Winkler, К. А. Кноп*)

6 класс

24-95. Из цифр от 1 до 6 составили три двузначных числа (каждая цифра использовалась один раз). Может ли произведение этих чисел заканчиваться на 25? (*А. А. Солынин*)

24-96. Винни-Пух и Пятачок съели горшочек мёда: Винни ел быстрее и съел половину, а потом скромно смотрел, как Пятачок доедает остаток. На следующий день они управились с таким же горшочком втрое быстрее, потому что Винни не остановился на половине, а помог Пятачку доесть. Во сколько раз Винни ест мёд быстрее, чем Пятачок? (Они начинают есть одновременно и всегда едят в одинаковом темпе). (Ср. с задачей 24-84) (*В. Е. Зверев*)

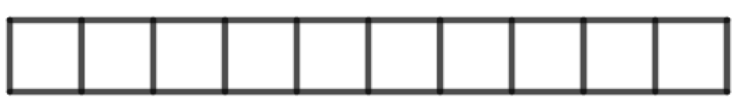
24-97. Среди 10 человек семь рыцарей и три лжеца. Рыцари всегда сообщают правду, а лжецы всегда лгут. Каждого попросили указать на какого-нибудь лжеца. Докажите, что по их ответам можно будет опознать хотя бы одного лжеца. (*М. А. Антипов*)

24-98. По кругу стоят четыре различных натуральных числа, каждое из них делится на разность своих соседей. Может ли сумма наибольшего и наименьшего из этих чисел быть больше, чем сумма двух оставшихся? (Ср. с задачей 24-92) (*М. А. Антипов*)

24-99. Натуральные числа разбили на два вида: летние и зимние, причём сумма любых двух зимних чисел — летнее число, произведение любых четырёх зимних чисел — тоже летнее число. Может ли оказаться, что среди любых ста последовательных чисел зимние составляют более трети?
(*М. А. Антипов*)

24-100. В спортклубе каждый теннисист дружит с четырьмя другими и готов играть парные матчи (двое на двое) только в паре с другом. Были сыграны все возможные такие матчи (по одному разу), после каждого матча каждый игрок жал руку своим друзьям из противоположной команды (если там были его друзья). Могло ли произойти ровно миллион рукопожатий? (*С. В. Сотников*)

24-101. Есть парк в форме прямоугольника 1×10 км, разделённый дорожками на 10 одинаковых квадратных полянок. (По периметру парка тоже идут дорожки.) Петя, Вася и Коля встали на некоторых перекрёстках, после чего одновременно начали ходить со скоростью 6 км/ч, не останавливаясь и не разворачиваясь (но поворачивая, когда хотят и могут, на 90°). Через 2025 минут Вася впервые встретил Петю, еще через сутки — Колю, а через час после этого Коля хлопнул по плечу Петю. Докажите, что он мог это сделать и когда-то до этого (хотя бы минутой раньше). (*М. А. Антипов*)



7 класс

24-102. В ряд выписаны девять различных натуральных чисел. Может ли так оказаться, что для любых двух троек подряд идущих чисел суммы чисел в этих тройках отличаются не более чем на 1? (*С. А. Лучинин*)

24-103. Дан равносторонний треугольник ABC. На продолжении отрезка AB за точку A отмечена точка X, на продолжении отрезка AC за точку A — точка Y, на продолжении отрезка BC за точку B — точка Z. Оказалось, что $\angle AXC = \angle AYB = \angle AZB$. Какой отрезок длиннее — XY или YZ? (*А. А. Солынин*)

24-104. Серёжа написал пять подряд идущих чисел, больших 10, каждое из них возвёл в квадрат и стёр у каждого результата всё, кроме последних двух цифр. Могли ли все десять оставшихся цифр быть различны? (*С. А. Лучинин*)

24-105. По кругу стоят 100 безумных светофоров. Каждую минуту они одновременно меняют цвет, причём каждый светофор переключает зелёный, жёлтый и красный цвета в некотором порядке по циклу. Всего есть два возможных цикла: зелёный-красный-желтый-зелёный-... и зелёный-желтый-красный-зелёный-.... Сейчас одна пара соседних светофоров показывает одинаковые цвета, а остальные пары соседних светофоров — разные. Докажите, что или через минуту, или через две минуты найдутся два соседних светофора, показывающих один и тот же цвет. (*С. А. Лучинин*)

24-106. В городе вырыто 1000 одинаковых по вместимости сточных колодцев, пронумерованных числами от 1 до 1000. Во время сезона дождей в каждый колодец заливалось столько литров воды в час, каков его номер, то есть в k-й колодец вода заливалась со скоростью k литров в час. Во избежание переполнения из-за неравномерного поступления воды колодцы были соединены трубами так, что если какой-то колодец заполнялся, вся вновь поступающая в него вода перетекала в следующий по номеру, из k в $k+1$, а из 1000-го — в 1-ый. По окончанию сезона дождей выяснилось, что все колодцы, кроме одного, оказались заполнены целиком. А каков номер этого не заполненного колодца? (*А. В. Лазуткин, В. А. Локтев*)

24-107. На столе лежат 100 карточек с числами от 1 до 100. Аня и Боря играют в игру, начинает Аня. За один ход справа от всех выложенных карточек нужно выложить любую ещё не разыгранную карточку. В конце игры подсчитывается количество «особых» чисел, которые или больше обоих своих соседей, или меньше обоих своих соседей (крайние числа не являются «особыми»). Какое наибольшее количество «особых» чисел может получить Аня, как бы ни играл Боря? (*С. А. Лучинин*)

24-108. Дано натуральное $x > 4$ такое, что числа $x-1$ и $x+1$ простые. Назовем конечную последовательность натуральных чисел, меньших x, красивой цепочкой, если для любых двух соседних чисел a и b в ней выполнено НОД$(ab-1, x^2-1) > 1$. Обязательно ли найдутся два различных числа, меньших миллиона, которые можно соединить красивой цепочкой? (*М. А. Антипов*)

8 класс

24-109. В трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$ $\angle B = 60°$, $AC = CD$. Докажите, что $AB + AD = 2BC$. (*А. А. Солынин*)

24-110. Шестьдесят снайперов затеяли перестрелку. Снайперу, застрелившему n других снайперов, запрещено стрелять в того, кто сам убил менее $n/2$ снайперов. В итоге остался один победитель. Какое наибольшее количество снайперов он мог застрелить? (*А. А. Солынин*)

24-111. У натурального числа N есть ровно 320 натуральных делителей: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{319} < d_{320} = N$. Может ли оказаться, что d_{320} делится на 1, d_{319} — на 2, d_{318} — на 3, ..., d_{311} — на 10? (*А. А. Солынин*)

24-112. С числом много раз проделывают следующую операцию: заменяют число n на $n - [\sqrt[3]{n}]$, пока не получится трёхзначное число. Если получилось 991, то такое n назовём красным, а если 999, — то синим. Каких чисел от миллиарда (10^9) до триллиона (10^{12}) больше — красных или синих, и на сколько? (*А. А. Солынин*)

24-113. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка K такая,что $AK||BD$. На отрезке AB выбрана точка E такая,что $\angle EKD = 90°$. Пусть M — середина отрезка BE. Докажите, что $KM = MC$. (*К. А. Бельский*)

24-114. Пятеро мудрецов сидят вокруг баобаба. Каждый из них видит только двух соседей и имеет право написать на бумажке одно из двух слов — «Охотник» или «Фазан». Дальше король зачитывает содержимое всех бумажек (называя не только слово, но и того, кто эту бумажку написал). Смогут ли мудрецы договориться так, чтобы после этого каждый из них смог однозначно восстановить порядок, в котором они сидят? (*К. А. Кноп*)

24-115. См. задачу **24-108.**

9 класс

24-116.

24-116.1. Вася нашел 11 вершин и хочет провести между ними n красных ребер и n синих ребер так, чтобы между каждыми вершинами было не более одного ребра, и чтобы никакие два разноцветных ребра не имели общий конец. При каком наибольшем n такое возможно?

24-116.2. Вася нашел граф, ребра которого раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Оказалось, что среди любых 10 вершин есть красное ребро, среди любых 20 вершин есть синее ребро, а среди любых 30 вершин есть зеленое ребро. Докажите, что среди любых 60 отмеченных вершин Вася найдет вершину, соединенную красным, синим и зеленым ребрами с другими отмеченными вершинами.

24-116.3. Вася нашел граф G на вершинах от 1 до 1000, после чего построил на его основе граф $G \times G$ на миллионе вершин, понравившийся ему гораздо больше, по следующему правилу: он рассмотрел таблицу 1000×1000 и для каждого ребра между вершинами i, j графа G соединил красными ребрами клетки (i, y) и (j, y) для всех y и синими ребрами клетки (x, i) и (x, j) для всех x.

Оказалось, что среди любых a вершин графа G найдется ребро. Докажите, что Вася сможет найти в любом множестве вершин графа $G \times G$ размера $2000a$ пару разноцветных ребер с общим концом.

24-116.4. Вася нашел граф, ребра которого раскрашены в k цветов. Оказалось, что среди любых a_i вершин найдется ребро i-ого цвета. Докажите, что внутри любого множества из $a_1 + \ldots + a_k$ вершин Вася сможет выбрать ребра $e_1, \ldots, e_k$ попарно различных цветов, таких что для всех i выполняется a) e_i и e_{i+1} имеют общий конец и b) общий конец ребер e_i и e_{i+1} отличается от общего конца ребер e_{i+1} и e_{i+2}, хотя бы $k!$ способами. (*Д. Д. Черкашин*)

24-117. Пусть x — натуральное число. Вася составляет красивую цепочку: цепочка должна состоять из чисел, меньших x, а для любых двух соседей a, b числа $ab - 1$ и $x^2 - 1$ должны иметь общий делитель, больший 1.

24-117.1. Пусть $x = 60$. Найдите какую-нибудь цепочку из четырех чисел, больших 1, в которой первое и последнее число совпадают, но не все числа равны.

24-117.2. Пусть $x = 582$, тогда Вася может соединить цепочкой любые два числа, меньшие x.

24-117.3. Пусть $x + 1 = n^2$, где n нечетно. Придумайте цепочку, в которой какие-то два числа, большие 1, различаются ровно в n раз.

24-117.4. Верно ли, что если $x-1$ и $x+1$ — простые, большие 10, то Вася гарантированно сможет соединить цепочкой какие то различные числа, меньшие миллиона? (Ср. с задачей 24-108) (*М. А. Антипов*)

24-118. Дан остроугольный треугольник ABC с площадью S и точки P, Q, R выбраны на сторонах BC, AB, AC, соответственно так, что $PQ \perp BC$, $QR \perp AB$, $PR \perp AC$.

24-118.1. Пусть ABC — равносторонний треугольник площади 1. Найдите площадь треугольника PQR.

24-118.2. Точки P', Q', S' выбраны на сторонах BC, AB, AC, соответственно так, что $P'Q' \perp AB$, $Q'R' \perp AC$, $P'R' \perp BC$. Докажите, что точки P, Q, R, P', Q', R' лежат на одной окружности.

24-118.3. Пусть O — центр окружности из прошлого пункта. Докажите, что O является точкой пересечения медиан треугольника с вершинами в серединах отрезков PP', QQ', RR'.

24-118.4. Дан вписанный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки P, Q, R, S выбраны на прямых AD, AB, CB, DC так, что $PQ \perp AB$, $QR \perp BC$, $RS \perp CD$, $SP \perp DA$. Оказалось, что четырёхугольники $PQRS$ и $ABCD$ (соответственно) подобны. Докажите, что центр описанной окружности четырёхугольника $PQRS$ — это точка пересечения диагоналей $ABCD$. (*К. А. Бельский*)

10 класс

24-119. Для конечного семейства подмножеств H конечного множества U, каждое множество которого содержит хотя бы 2 элемента, определим граф $G(H)$ 1-пересечений, вершинами которого являются множества H, а ребра соединяют пары множеств с единичным пересечением.
24-119.1. Вася нашел удивительную систему

$$H = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,5,6\}\}$$

в множестве $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Докажите, что как бы Вася ни покрасил элементы U в два цвета, в H найдется одноцветное множество.
24-119.2. Докажите, что если $G(H)$ не имеет ребер, то элементы U могут быть покрашены в два цвета, так что каждое множество семейства H содержит элементы обоих цветов.
24-119.3. Оказалось, что $G(H)$ — двудольный. Докажите, что элементы U могут быть покрашены в два цвета, так что каждое множество семейства H содержит элементы обоих цветов.
24-119.4. Оказалось, что $G(H)$ правильно красится в 4 цвета. Докажите, что элементы U могут быть покрашены в четыре цвета, так что никакое множество семейства H не является одноцветным.

(*Д. Д. Черкашин*)

24-120. Для последовательности вещественных чисел $X = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, принадлежащих отрезку $[0,1)$, рассмотрим набор последовательностей $F_{X,k}(x,y)$, определенных для всех $0 \le x \le y \le 1$ следующим образом:

$$F_{X,k}(x,y) = \Big|\#\big\{i \in \{1,2,\ldots,k\} \mid x_i \in [x,y)\big\} - k(y-x)\Big|.$$

Иными словами, $F_{X,k}(x,y)$ — это модуль разности между количеством первых k чисел последовательности X в промежутке $[x,y)$ и длиной промежутка, умноженной на k.
24-120.1. Придумайте последовательность X чисел из $[0,1)$, такую, что $F_{X,k}(x,y) \le 2$ для всех k от 1 до 6 и любых $0 \le x \le y \le 1$.
24-120.2. Найдите все вещественные числа C, такие, что существует последовательность X чисел из $[0,1)$, такая, что $F_{X,k}(x,y) \le C$ для всех k от 1 до 3 и любых $0 \le x \le y \le 1$.
24-120.3. Пусть для некоторой последовательности X существует последовательность $B = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, такая, что $F_{X,k}(0,y) \le b_k$ для любого k и любого $0 \le y \le 1$. Докажите, что $F_{X,k}(x,y) \le 2b_k$ для любого k и любых $0 \le x \le y \le 1$.
24-120.4. Докажите, что существует последовательность X такая, что $F_{X,k}(x,y) \le 10(\log_2 k + 2)$ для любого k и любых $0 \le x \le y \le 1$.

(*П. К. Прозоров, Д. Д. Черкашин*)

24-121. Точки P и Q будем называть *изогонально сопряженными* в равностороннем треугольнике ABC, если пары прямых AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно оси симметрии треугольника ABC, которая проходит через соответствующую вершину. O — центр треугольника ABC.
24-121.1. Докажите, что середина отрезка AO изогонально сопряжена точке пересечения медиан треугольника BOC.
24-121.2. Докажите, что если O, P, Q лежат на одной прямой ℓ, то ℓ является осью симметрии треугольника ABC.
24-121.3. Оказалось, что точки O, P, Q лежат на одной прямой и точки P и Q лежат внутри треугольника ABC. Найдите $|1/OP - 1/OQ|$, если сторона треугольника ABC равна 1.
24-121.4. Оказалось, что $\angle POQ = 90°$. Докажите, что PQ касается описанной окружности треугольника ABC.

(*К. А. Бельский*)

11 класс

24-122. См. сюжет **24-119.**
24-123. См. сюжет **24-120.**
24-124.

24-124.1. Дан треугольник ABC, где $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Рассмотрим множество таких точек P внутри треугольника, что расстояние от P до BC меньше, чем до двух других сторон. Найдите его площадь.

24-124.2. Дан равносторонний треугольник ABC с площадью S. Рассмотрим множество точек P внутри треугольника ABC таких, что из расстояний от P до сторон можно сложить треугольник. Чему равна его площадь?

24-124.3. Даны две не пересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с радиусами r_1 и r_2. Рассмотрим множество середин отрезков, один конец которых лежит на ω_1, а другой — на ω_2. Найдите его площадь.

24-124.4. Дан треугольник ABC с площадью S. На стороне BC выбирается точка D. Точки E и F выбираются на сторонах AB и AC так, что $AEDF$ параллелограмм. Обозначим за ℓ_d прямую EF. Найдите площадь, которую ограничивают все прямые вида ℓ_d и отрезок BC. (*К. А. Бельский*)