

В задачах 1-9 напишите только ответ.

1. Вычислите $(49476 : 19 - 604) \cdot (2101 - 799) + 260$

Ответ: 2604260

Критерии:

- 3 балла за правильный ответ

		Л					
	Л						
Л		К	Л		К	Л	
					Л		

2. На половинке шахматной доски поставили двух коней. Расставьте как можно больше ладей так, чтобы они не били друг друга, а уже стоящие кони не били ладей.

Ответ: Можно расставить 6 ладей, пример на рисунке.

Критерии:

- 3 балла за правильное решение

3. Мише нравится пятизначные числа, делящиеся на 3, а Катя любит чётные числа, не делящиеся на 9. Найдите наибольшее число, которое понравится одновременно и Кате, и Мише.

Ответ: 99996

Критерии:

- 3 балла за правильный ответ
- 1 балл, если вместо наибольшего числа найдено наименьшее (10002)

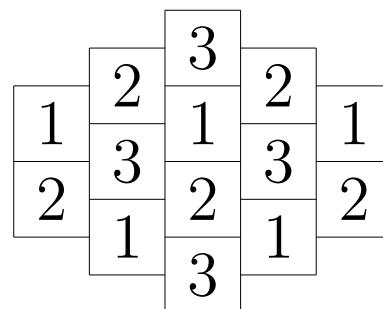
4. Вокруг круглого по форме озера расположены четыре поселка: Арбузный, Веселый, Счастливый и Дальний (необязательно в указанном порядке). От Арбузного поселка до Веселого ехать 35 минут, от Арбузного до Счастливого – 20 минут, от Счастливого до Дальнего – 20 минут, а от Дальнего до Арбузного – 30 минут, при этом всегда выбирается кратчайший из путей вдоль озера. Сколько времени займет дорога от Веселого к Счастливому поселку?

Ответ: 15 минут

Критерии:

- 5 баллов за правильный ответ

5. Заполните таблицу числами 1, 2 или 3 так, чтобы числа в соседних клетках были различны. Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или часть стороны.



Критерии:

- 4 балла за правильный ответ

6. На отрезке AB есть 4 зелёные точки, которые делят его на 5 равных частей, а также 5 синих точек, которые делят его на 6 равных частей. Наименьшее расстояние между зелёной и синей точкой равно 15 мм. Какова длина AB в сантиметрах?

Ответ: 45 (см)

Критерии:

- 5 баллов за правильный ответ
- 3 балла за ответ “450 мм”, или “4,5 дм”, или “0,45 м”, если указаны единицы измерения.
- 1 балл за ответ “450” без указания единиц измерения.

В задачах 10-13 напишите ответ и решение.

10. В первый день каждого месяца Диана получает карманные деньги: каждый раз ей дают столько денег, сколько у Дианы уже было в кошельке, и ещё 200 рублей. Диана – сладкоежка, и все два месяца каждый вечер она покупает в ларьке у дома конфетку за 13 рублей. В конце февраля у Дианы в кошельке осталось ровно 2026 рублей. Сколько денег было у Дианы 31 декабря? В январе 31 день, а в феврале – 28.

Решение. Пусть у Дианы было x денег в кошельке 31 декабря, тогда 1 января в её кошельке стало $2x + 200$ рублей.

В конце января эта сумма уменьшилась на $13 \cdot 31$ рублей - значит, осталось $2x + 200 - 13 \cdot 31$.

В феврале: 1 февраля было $2x + 200 - 13 \cdot 31$, эта сумма удвоилась и добавились ещё 200 рублей.

В конце февраля сумма убавилась на $13 \cdot 28$ рублей.

Составим уравнение:

$$(2x + 200 - 13 \cdot 31) \cdot 2 + 200 - 13 \cdot 28 = 2026$$

$$4x + 400 - 806 + 200 - 364 = 2026$$

$$4x = 2026 - 600 + 1170$$

$$4x = 2596$$

$$x = 649$$

Заметим, что решение без уравнения предполагает выполнение тех же действий, но в обратном порядке:

$$2026 + 364 = 2390 \quad - 1 \text{ февраля}$$

$$(2390 - 200) : 2 = 1095 \quad - 31 \text{ января}$$

$$1095 + 403 = 1498 \quad - 1 \text{ января}$$

$$(1498 - 200) : 2 = 649 \quad - 31 \text{ декабря.}$$

Ответ: 649

Критерии:

- 8 баллов за правильный ответ и полное решение
- 2 балла за правильное уравнение
- -1 балл – каждая арифметическая ошибка
- 2 балла, если посчитан только 1 месяц, и решение на этом закончилось
- 4 балла, если вместо прибавления расходов за месяц два раза выполнено вычитание

11. Семья Ивановых заказывает доставку каждые 1.5 часа (первый заказ в 00:00, затем в 01:30, 03:00 и тд), а семья Петровых каждые 45 минут (00:00, 00:45, 01:30 и тд). Дорога от пункта выдачи до дома Ивановых занимает 40 минут, а до Петровых – 80 минут, Курьер за раз может нести не более одного заказа. Какое минимальное количество курьеров нужно нанять, чтобы к началу нового дня на складе не оставалось товаров (то есть все заказы доставлены или в процессе доставки)?

Решение. Будем считать всё в минутах.

В суткам $24 \cdot 60 = 1440$ минут, тогда семья Ивановых сделает $1440/90 = 16$ заказов. А семья Петровых $1440/45 = 32$ заказа.

Пример: Построим пример на 5 курьеров.

Пусть один будет закреплен за Ивановыми, он справится в одиночку – так как на дорогу туда и обратно уходит 80 минут, а новый заказ появится через 90 минут.

4 курьера будут доставлять заказ Петровым. На дорогу туда и обратно уходит 160 минут, а пятый заказ появится через $45 \cdot 4 = 180$ минут.

Оценка: Докажем, что 4 курьеров не хватит. Посчитаем, сколько рабочего времени нужно потратить на обработку этих заказов. На один заказ Ивановых требуется $40 \cdot 2 = 80$ минут, а Петровых $80 \cdot 2 = 160$ минут. То есть суммарно получается $16 \cdot 80 + 160 \cdot 32 = 6400$ минут.

Посчитаем, сколько времени может работать один курьер. Он может работать сутки (1440 минут) плюс маленький хвостик на доставку заказа, пришедшего незадолго до полуночи. Этот хвостик не более $160 - 45$ минут (потому что последний заказ поступит не позже $23 : 15$). $1440 + 160 = 1600$ минут. Получается, 4 курьера работают не более $1600 \cdot 4 = 6400$ минут. Но в этом случае все работники должны доставлять заказы без отдыха вообще. Но по условию задачи в $00 : 00$ поступает два заказа, – значит, все, кроме двух курьеров, уехавших на заказы, сидят без работы. Значит, минимальное количество курьеров как минимум 5.

Критерии:

- 10 баллов за полное решение
- 2 балла – только пример.
- 4 балла – оценка без учёта “хвостика”.
- 4 балла – учёт “хвостика”.

12. В очереди стоят Папа, Мама, Бабушка, Сын и Дочка. Сколькими способами семья может выстроиться в очередь так, что при любом продвижении очереди взрослых в очереди стояло бы не меньше, чем детей?

Решение. Способ 1 - убираем неподходящее. Заметим, что продвижение очереди, в котором взрослых *меньше*, чем детей, возможно в двух случаях. 1 – очередь в виде цепочки ВВДДВ (таких вариантов 12, $6 \cdot 2 = 12$) 2 – ребенок стоит в конце очереди (ВВВДД, ВВДВД и так далее) – 48 способов (4 способа поставить другого ребенка не в конец и 12 способов расставить трех взрослых по трем и двух детей по двум местам).

Всего способов расставить 5 человек – 120, соответственно нам подойдет 60 способов.

Способ 2 - считаем подходящее. Заметим, что ребенок не может стоять последним, а каждый вариант расстановки умножается на 12 (три взрослых и два ребенка по их местам).

Всего вариантов расстановки 6 ($4 \cdot 3/2$): ДДВВВ, ДВДВВ, ДВВДВ, ВДДВВ, ВДВДВ, ВВДДВ.

Последний вариант не подходит – остается $5 \cdot 12 = 60$.

Критерии:

- 8 баллов за правильный ответ и полное решение
- 1 балл, если посчитан только 1 вариант (12)
- 2 балла, если сказано, что ребенок в конце очереди не может быть последним

13. Для каждого натурального числа a будем обозначать через a^* сумму числа a и его цифр (например, $38^* = 38 + 3 + 8 = 49$, $6^* = 6 + 6 = 12$). Найдите наименьшее натуральное число a , для которого существует другое натуральное число b , такое что $a^* = b^*$. Докажите, что оно минимально.

Решение. Заметим, что в паре $a < b$, иначе их можно поменять местами

Если a однозначное число, то $a^* = 2a$.

Если b тоже однозначное, то $2a = 2b$, следовательно $a = b$, не подходит.

Если b двузначное ($b = \overline{cd} = 10c + d$), то $b^* = 10c + d + c + d = 11c + 2d$. Посмотрим на равенство $2a = 11c + 2d$, из него следует, что c – чётное, а значит хотя бы 2 ($b \geq 20$), но $2a$ не более 18.

Очевидно, что b – трехзначное и более заведомо не подходят, так как $b^* > b$.

Пусть теперь a и b двузначные ($a = \overline{xy} = 10x + y$, $b = \overline{cd} = 10c + d$). Тогда $11x + 2y = 11c + 2d$, значит $11(x - c) = 2(d - y)$. Разница двух цифр не может делиться на 11, если она не 0, но тогда $d = y$ и $x = c$, то есть $a = b$. Не подходит.

Остаётся разобрать случай если a – двузначное, а b – трехзначное. Но тогда $11x + 2y > 100$. Как мы сказали ранее $2y$ не более 18. Значит a хотя бы 8. Если $a = 8$, то b хотя бы 7. Проверим следующие

числа $87^* = 102$, $88^* = 104$, $89^* = 106$, $90^* = 99$ (не подходит), $91 = 101$. Заметим, что b должен иметь вид $\overline{10e}$. Следовательно $b^* = 100 + e + e + 1$, то есть оно не чётно. Значит ответ $a = 91$ ($b = 100$).

Критерии:

- 10 баллов за полное решение
- 2 балла – только ответ
- 2 балла – случай с двумя однозначными
- 2 балла – случай однозначное и двузначное
- 2 балла – случай с двумя двузначными
- 2 балла – случай двузначное и трёхзначное
- 1 балл, если дан не минимальный ответ

В задачах 1-9 напишите только ответ.

1. Вычислите $(57494 : 19 - 1026) \cdot (920 - 790) + 426$

Ответ: 260426

Критерии:

- 3 балла за правильный ответ

2. На половинке шахматной доски поставили двух коней. Расставьте как можно больше ладей так, чтобы они не били друг друга, а уже стоящие кони не били ладей.

Ответ: Можно расставить 6 ладей, пример на рисунке.

Критерии:

- 3 балла за правильное решение

				Л			
	Л				К	Л	
Л		К			Л		
		Л					

3. Мише нравится пятизначные числа, делящиеся на 3, а Катя любит числа, кратные 5, но не делящиеся на 9. Найдите наибольшее число, которое понравится одновременно и Кате, и Мише.

Ответ: 99975

Критерии:

- 3 балла за правильный ответ
- 1 балл, если вместо наибольшего числа найдено наименьшее (10005).

4. Вокруг круглого по форме озера расположены четыре поселка: Арбузный, Веселый, Счастливый и Дальний (необязательно в указанном порядке). От Арбузного поселка до Веселого ехать 50 минут, от Арбузного до Счастливого – 40 минут, от Счастливого до Дальнего – 25 минут, а от Дальнего до Арбузного – 35 минут, при этом всегда выбирается кратчайший из путей вдоль озера. Сколько времени займет дорога от Веселого к Счастливому поселку?

Ответ: 10 минут

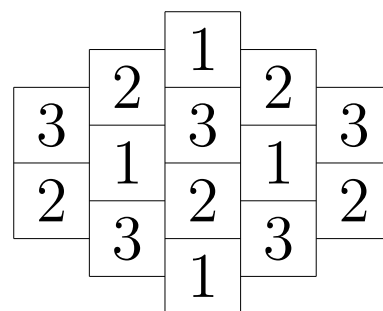
Критерии:

- 5 баллов за правильный ответ

5. Заполните таблицу числами 1, 2 или 3 так, чтобы числа в соседних клетках были различны. Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или часть стороны.

Критерии:

- 4 балла за правильный ответ



6. На отрезке AB есть 5 зелёных точек, которые делят его на 6 равных частей, а также 4 синие точки, которые делят его на 5 равных частей.

Наименьшее расстояние между зелёной и синей точкой равно 20 мм. Какова длина AB в сантиметрах?

Ответ: 60 (см)

Критерии:

- 5 баллов за правильный ответ
- 3 балла за ответ “600 мм”, или “6 дм”, или “0,6 м”, если указаны единицы измерения.
- 1 балл за ответ “600” без указания единиц измерения.

В задачах 10-13 напишите ответ и решение.

10. В первый день каждого месяца Диана получает карманные деньги: каждый раз ей дают столько денег, сколько у Дианы уже было в кошельке, и ещё 200 рублей. Диана – сладкоежка, и все два месяца каждый вечер она покупает в ларьке у дома конфетку за 13 рублей. В конце февраля у Дианы в кошельке осталось ровно 2026 рублей. Сколько денег было у Дианы 31 декабря? В январе 31 день, а в феврале – 28.

Решение. Пусть у Дианы было x денег в кошельке 31 декабря, тогда 1 января в её кошельке стало $2x + 200$ рублей.

В конце января эта сумма уменьшилась на $13 \cdot 31$ рублей - значит, осталось $2x + 200 - 13 \cdot 31$.

В феврале: 1 февраля было $2x + 200 - 13 \cdot 31$, эта сумма удвоилась и добавились ещё 200 рублей.

В конце февраля сумма убавилась на $13 \cdot 28$ рублей.

Составим уравнение:

$$(2x + 200 - 13 \cdot 31) \cdot 2 + 200 - 13 \cdot 28 = 2026$$

$$4x + 400 - 806 + 200 - 364 = 2026$$

$$4x = 2026 - 600 + 1170$$

$$4x = 2596$$

$$x = 649$$

Заметим, что решение без уравнения предполагает выполнение тех же действий, но в обратном порядке:

$$2026 + 364 = 2390 \quad - 1 \text{ февраля}$$

$$(2390 - 200) : 2 = 1095 \quad - 31 \text{ января}$$

$$1095 + 403 = 1498 \quad - 1 \text{ января}$$

$$(1498 - 200) : 2 = 649 \quad - 31 \text{ декабря.}$$

Ответ: 649

Критерии:

- 8 баллов за правильный ответ и полное решение
- 2 балла за правильное уравнение
- -1 балл – каждая арифметическая ошибка
- 2 балла, если посчитан только 1 месяц, и решение на этом закончилось
- 4 балла, если вместо прибавления расходов за месяц два раза выполнено вычитание

11. Семья Ивановых заказывает доставку каждые 1.5 часа (первый заказ в 00:00, затем в 01:30, 03:00 и тд), а семья Петровых каждые 45 минут (00:00, 00:45, 01:30 и тд). Дорога от пункта выдачи до дома Ивановых занимает 40 минут, а до Петровых – 80 минут, Курьер за раз может нести не более одного заказа. Какое минимальное количество курьеров нужно нанять, чтобы к началу нового дня на складе не оставалось товаров (то есть все заказы доставлены или в процессе доставки)?

Решение. Будем считать всё в минутах.

В суткам $24 \cdot 60 = 1440$ минут, тогда семья Ивановых сделает $1440/90 = 16$ заказов. А семья Петровых $1440/45 = 32$ заказа.

Пример: Построим пример на 5 курьеров.

Пусть один будет закреплён за Ивановыми, он справится в одиночку – так как на дорогу туда и обратно уходит 80 минут, а новый заказ появится через 90 минут.

4 курьера будут доставлять заказ Петровым. На дорогу туда и обратно уходит 160 минут, а пятый заказ появится через $45 \cdot 4 = 180$ минут.

Оценка: Докажем, что 4 курьеров не хватит. Посчитаем, сколько рабочего времени нужно потратить на обработку этих заказов. На один заказ Ивановых требуется $40 \cdot 2 = 80$ минут, а Петровых $80 \cdot 2 = 160$ минут. То есть суммарно получается $16 \cdot 80 + 160 \cdot 32 = 6400$ минут.

Посчитаем, сколько времени может работать один курьер. Он может работать сутки (1440 минут) плюс маленький хвостик на доставку заказа, пришедшего незадолго до полуночи. Этот хвостик не более $160 - 45$ минут (потому что последний заказ поступит не позже $23 : 15$). $1440 + 160 = 1600$ минут. Получается, 4 курьера работают не более $1600 \cdot 4 = 6400$ минут. Но в этом случае все работники должны доставлять заказы без отдыха вообще. Но по условию задачи в $00 : 00$ поступает два заказа, – значит, все, кроме двух курьеров, уехавших на заказы, сидят без работы. Значит, минимальное количество курьеров как минимум 5.

Критерии:

- 10 баллов за полное решение
- 2 балла – только пример.
- 4 балла – оценка без учёта “хвостика”.
- 4 балла – учёт “хвостика”.

12. В очереди стоят Папа, Мама, Бабушка, Сын и Дочка. Сколькими способами семья может выстроиться в очередь так, что при любом продвижении очереди взрослых в очереди стояло бы не меньше, чем детей?

Решение. Способ 1 - убираем неподходящее. Заметим, что продвижение очереди, в котором взрослых *меньше*, чем детей, возможно в двух случаях. 1 – очередь в виде цепочки ВВДДВ (таких вариантов 12, $6 \cdot 2 = 12$) 2 – ребенок стоит в конце очереди (ВВВДД, ВВДВД и так далее) – 48 способов (4 способа поставить другого ребенка не в конец и 12 способов расставить трех взрослых по трем и двух детей по двум местам).

Всего способов расставить 5 человек – 120, соответственно нам подойдет 60 способов.

Способ 2 - считаем подходящее. Заметим, что ребенок не может стоять последним, а каждый вариант расстановки умножается на 12 (три взрослых и два ребенка по их местам).

Всего вариантов расстановки 6 ($4 \cdot 3/2$): ДДВВВ, ДВДВВ, ДВВДВ, ВДДВВ, ВДВДВ, ВВДДВ.

Последний вариант не подходит – остается $5 \cdot 12 = 60$.

Критерии:

- 8 баллов за правильный ответ и полное решение
- 1 балл, если посчитан только 1 вариант (12)
- 2 балла, если сказано, что ребенок в конце очереди не может быть последним

13. Для каждого натурального числа a будем обозначать через a^* сумму числа a и его цифр (например, $38^* = 38 + 3 + 8 = 49$, $6^* = 6 + 6 = 12$). Найдите наименьшее натуральное число a , для которого существует другое натуральное число b , такое что $a^* = b^*$. Докажите, что оно минимально.

Решение. Заметим, что в паре $a < b$, иначе их можно поменять местами

Если a однозначное число, то $a^* = 2a$.

Если b тоже однозначное, то $2a = 2b$, следовательно $a = b$, не подходит.

Если b двузначное ($b = \overline{cd} = 10c + d$), то $b^* = 10c + d + c + d = 11c + 2d$. Посмотрим на равенство $2a = 11c + 2d$, из него следует, что c – чётное, а значит хотя бы 2 ($b \geq 20$), но $2a$ не более 18.

Очевидно, что b – трехзначное и более заведомо не подходят, так как $b^* > b$.

Пусть теперь a и b двузначные ($a = \overline{xy} = 10x + y$, $b = \overline{cd} = 10c + d$). Тогда $11x + 2y = 11c + 2d$, значит $11(x - c) = 2(d - y)$. Разница двух цифр не может делиться на 11, если она не 0, но тогда $d = y$ и $x = c$, то есть $a = b$. Не подходит.

Остаётся разобрать случай если a – двузначное, а b – трехзначное. Но тогда $11x + 2y > 100$. Как мы сказали ранее $2y$ не более 18. Значит a хотя бы 8. Если $a = 8$, то b хотя бы 7. Проверим следующие

числа $87^* = 102$, $88^* = 104$, $89^* = 106$, $90^* = 99$ (не подходит), $91 = 101$. Заметим, что b должен иметь вид $\overline{10e}$. Следовательно $b^* = 100 + e + e + 1$, то есть оно не чётно. Значит ответ $a = 91$ ($b = 100$).

Критерии:

- 10 баллов за полное решение
- 2 балла – только ответ
- 2 балла – случай с двумя однозначными
- 2 балла – случай однозначное и двузначное
- 2 балла – случай с двумя двузначными
- 2 балла – случай двузначное и трёхзначное
- 1 балл, если дан не минимальный ответ