



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур, 15 октября 2022 года
7 класс



1. Можно ли из тысячи равных прямоугольников с периметром 1000 сложить прямоугольник с периметром 1100?
2. В фирме «Рога и копыта» 150 сотрудников, и у всех разная зарплата. Некоторые из сотрудников всегда говорят правду, остальные всегда врут. Всем сотрудникам задали два вопроса: «Относите ли вы к сотне наиболее высокооплачиваемых сотрудников фирмы?» и «Относите ли вы к сотне самых низкооплачиваемых сотрудников?». На каждый из них было дано по крайней мере 100 утвердительных ответов. Врал ли при опросе 70-й по зарплате (начиная с самых высокооплачиваемых) сотрудник?
3. Ира хочет найти такие целые $x, y, z > 1$, чтобы выполнялось равенство

$$2022! = 2^x + 3^y + 5^z.$$

Докажите, что у неё это не получится.

Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

4. На доске 45×45 провели 11 разрезов по линиям сетки (все разрезы идут от края до края). Оказалось, что среди получившихся прямоугольников нет двух одинаковых. Докажите, что среди них есть квадрат.
5. Леонард переехал в новый дом и заметил, что в каждой комнате не менее трёх ламп. При этом каждый выключатель меняет состояние ровно двух ламп, и каждая лампа подключена ровно к одному выключателю. Докажите, что независимо от начального состояния ламп Леонард сможет так нажать на выключатели, чтобы в каждой комнате были как включённые, так и выключенные лампы.