



Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур, 15 октября 2022 года
10 класс



1. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$ имеет два корня a и b . А квадратный трёхчлен $x^2 - p^2x + q^2$ имеет корни a^2 и b^2 . Найдите все такие квадратные трёхчлены или докажите, что их нет.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH и две медианы AA_1 и CC_1 . Оказалось, что AA_1 — биссектриса угла HAB . Докажите, что высота AH и медиана AA_1 делят вторую медиану CC_1 на три равных отрезка.

3. Пять различных чисел a, b, c, d, e таковы, что

$$\frac{e - c}{b - a} = \frac{a - d}{c - b} = \frac{b - e}{d - c} = \frac{d - b}{a - e}.$$

Докажите, что $\frac{c-a}{e-d}$ равно тому же самому значению, и найдите это значение.

4. На доске написано число $900\dots 0$ (1000 нулей после девятки). Два игрока ходят по очереди. За один ход написанное на доске число можно умножить на $\frac{p}{q^2}$, где p и q — простые делители написанного на доске числа. Результат умножения должен оказаться целым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. В стране 99 городов, и каждые два соединены прямой авиалинией. Цена перелёта между двумя городами фиксирована и составляет либо 1000, либо 2000 рублей. Сумма цен на билеты из каждого города не меньше 120000. Барон Мюнхгаузен и Вася поспорили, что барон может облететь несколько городов, не посетив ни один из них дважды, и потратить на билеты не менее 140000 рублей. Всегда ли барон сможет победить?