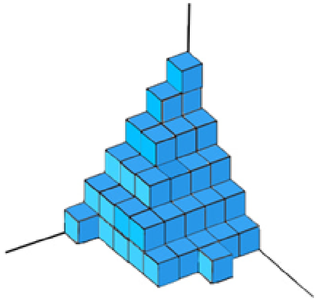
Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
4 класс

Решения

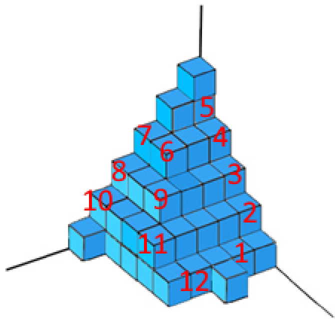
1. Варя составила пирамидку из маленьких кубиков, как показано на рисунке. Затем Варя её склеила и покрасила со всех сторон (даже снизу) в синий цвет. У скольких маленьких кубиков будут покрашены ровно три грани?

(*Л. Ю. Ярмагаев*)



Ответ: 13

Решение. 12 кубиков видны на картинке, кроме них подходит еще один с обратной стороны в углу.



Критерии.

(а) Полное решение (подсчёт) и ответ —7 баллов.

(б) Только правильный ответ — 5 баллов.

(в) Неверный ответ без обоснования — 0 баллов

(г) Ответ меньше 12 или больше 14 — 0 баллов

(д) Верно описаны нужные кубики, в ответе ошибка на 1 — 6 баллов.

(е) Ответ 12, кубики на видимых гранях посчитаны верно, но сзади кубик забыт — 3 балла.

(ж) Ответ 12, кубик сзади не забыт, но забыт / подсчитан дважды один из кубиков на видимой стороне фигуры — 5 баллов.

2. На 50 карточках написаны числа от 1 до 50. Лев выложил все карточки в ряд, чтобы получилось наибольшее возможное 91-значное число. Какая карточка могла оказаться на 12-м месте слева? Не забудьте обосновать свой ответ.

(*В. Н. Галиулина*)

Ответ: 4 или 44.

Решение. Число тем больше, чем бОльшая цифра в старшем разряде. Поэтому первая слева цифра — 9. Далее цифры идут по убыванию до 5, чисел, начинающихся на 5 — два: 5 и затем 50. Далее выставляем числа так, чтобы первая цифра была 4, а вторая —- как можно больше. Таким образом получаем начало из 11 карточек: 9, 8, 7, 6, 5, 50, 49, 48, 47, 46, 45. Далее либо 4 и 44, либо 44 и 4, оба варианта возможны и дают приведенный выше ответ.

Критерии.

(а) Приведен только один правильный ответ без объяснений — 1 балл

(б) Написаны оба правильных ответа без объяснений — 3 балла

(в) Правильно выписано многозначное число (или его необходимая часть), но не найдена (правильно) 12-я карточка — 3 балла

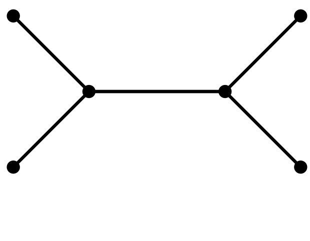
(г) То же, но один из правильных ответов найден — 4 балла

(д) То же, но есть оба правильных ответа 6 баллов

(е) Полное решение (всё, что выше + объяснение максимальности выписанного числа) — 7 баллов

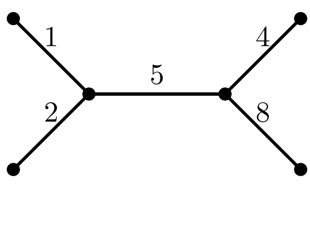
(ж) Если решение неверное — 0 баллов.

3. На рисунке показана схема из пяти участков автомобильных дорог между шестью деревнями. Известно, что длины этих участков — 1, 2, 4, 5 и 8 км в некотором порядке. Также известно, что все расстояния между деревнями (по дорогам) различны. Приведите пример такой схемы. Находить все возможные варианты не требуется.



(*К. А. Кноп*)

Ответ: Вот один из вариантов схемы.



Решение. Далее приведены рассуждения, которые могут помочь при построении схемы. Приводить подобные рассуждения в решении не требуется. Достаточно предъявить правильную схему дорог.

Шесть деревень дают 15 различных расстояний, поэтому нам нужно получить где-то расстояние не меньшее 15, причем набрать его не более чем тремя отрезками (дорогами). Это либо $2+5+8$, либо $4+5+8$. Деревни, между которыми расстояния 1 и 2, должны быть соседними, так как иначе не получить расстояние 3. Значит, вариант с $4+5+8$ не подходит. Тогда, не умаляя общности, 1 и 2 — длины двух верхних дорог, 5 и 8 — одна средняя и одна нижняя, а 4 — другая нижняя. Длина средней дороги не может быть равна 8, потому что иначе расстояние 13 встречается дважды — как $1+8+4$ и как $8+5$. Отсюда получаем ответ, причем он по существу единственный: в любом правильном примере на горизонтальном ребре — 5, с одного края — 1 и 2, с другого — 4 и 8.

Критерии.

(а) Правильная схема приведена — 7 баллов.

(б) Существенно другой ответ — 0 баллов.

4. Андрей, Боря, Варя, Гриша и Даша решали задачи на маткружке и составили рейтинг по количеству правильно сданных задач.

Андрей: «Боря сдал больше задач, чем Варя».

Боря: «Андрей в рейтинге выше Даши».

Варя: «Боря нарешал больше Гриши».

Гриша: «Даша обогнала меня в рейтинге».

Даша: «Я решила больше всех!».

Определите, кто какое место в этом рейтинге занял, если известно, что правду сказал только тот, кто сдал правильно больше всех задач.

(*В. Н. Галиулина*)

Ответ: Варя — 1 место, Боря — 2, Гриша — 3, Даша — 4, Андрей — 5.

Решение. Так как Гриша и Даша говорят одно и тоже, они оба врут. Осталось проверить, кто из остальных мог быть первым в рейтинге. Пусть Андрей первый в рейтинге, значит он говорит правду, но тогда и Боря говорит правду, а по условию он должен врать — противоречие. Пусть Боря первый в рейтинге, но тогда Андрей тоже говорит правду —- снова противоречие. Пусть Варя говорит правду. Тогда она первая в рейтинге. Боря не первый, но по верному утверждению Вари — Боря выше Гриши. Сам Гриша сдал правильно больше задач, чем Даша (согласно его высказыванию), а Андрей сдал задач меньше, чем Даша (согласно высказыванию Бори). Таким образом, рейтинг выглядит так: Варя — 1 место, Боря — 2, Гриша — 3, Даша — 4, Андрей — 5.

Критерии.

(а) Верен только ответ — 1 балл.

(б) Сказано, что Гриша и Даша оба врут — 2 балла.

(в) Разобраны два случая и написан ответ — 3 балла.

(г) Не разобран один случай, но есть правильный ответ — 5 баллов.

(д) Решение правильное, но ответа нет — 6 баллов.

(е) Написаны верное решение и ответ — 7 баллов.

5. Варя заменяет буквы натуральными числами. Букву А она заменила неким числом N, букву Б — следующим числом (то есть $N+1$), букву В — числом $N+2$, и так далее. Тогда слова превращаются в многозначные числа. Например, если букву А заменили числом 123, тогда слово АГА превращается в число 123126123. Может ли сумма чисел, полученных из слов ПАС, ПАР и ПАТ оказаться простым числом?

Напомним, что натуральное число, большее 1, называется простым, если оно без остатка делится только на 1 и само на себя.

(*В. Н. Галиулина*)

Ответ: Нет.

Решение. Так как Р, С и Т в алфавите идут по порядку, значит, им соответствуют последовательные числа. Докажем, что ПАР+ПАС+ПАТ делится на 3 (и больше, чем 3) и, следовательно, не может быть простым. В самом деле, остаток ПАР+ПАС+ПАТ при делении на 3 такой же, как и у суммы остатков ПАР, ПАС и ПАТ при делении на 3. Остаток числа ПАР при делении на 3 такой же, как и у П+А+Р: число ПАР можно записать как сумму трёх чисел: П и несколько нулей, А и несколько нулей, и Р. (Например, если А=101, П=117, Р=118, то ПАР=117000000+101000+118.) Но если у числа убрать несколько нулей из записи, то остаток при делении на 3 не поменяется, ибо сумма цифр останется той же. Итак, остаток ПАР+ПАС+ПАТ при делении на 3 такой же, как и у П+А+Р+П+А+С+П+А+Т=3П+3А+Р+С+Т, т.е. такой же, как у суммы трёх последовательных чисел Р+С+Т, а такой остаток равен 0.

Замечание. Сами числа ПАР, ПАС и ПАТ могут не быть последовательными числами. Например, при А=82, П=98,Р=99,С=100,Т=101 имеем ПАР=988299, ПАС=9882100 и ПАТ=9882101. Эти числа не последовательные.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Незначительные огрехи в решении — 6 баллов.

(в) Приведено решение, где числа ПАС, ПАТ, ПАР последовательные — 3 балла.

(г) Приведено решение для последовательных чисел с огрехами — 2 балла.

(д) Верен только ответ — 0 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы

Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
5 класс

Решения

1. Андрей задумал число без нулей в записи, разделил его с остатком на каждую из его цифр и написал полученные остатки. Могло ли оказаться, что из написанных цифр можно составить задуманное число?

(*А. А. Солынин*)

Ответ: Нет.

Решение. Максимальная цифра исходного числа не может встретиться среди остатков.

Критерии.

(а) Правилен только ответ — 0 баллов.

(б) В решении сказано, что остаток меньше цифры-делителя — 1 балл

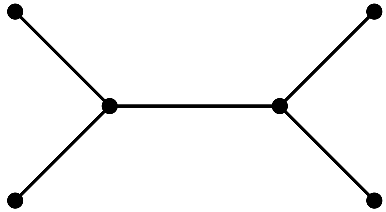
(в) В решении есть рассуждение про максимальную/минимальную цифру исходного числа — 4 балла

(г) Выполнены оба критерия выше — 5 баллов

(д) В решении забыт остаток 0 при делении на цифру, но в остальном это полное решение — 5 баллов

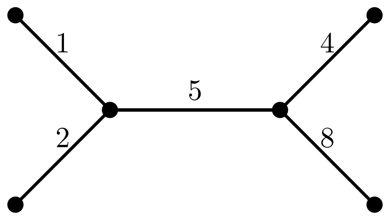
(е) Полное решение — 7 баллов.

2. На рисунке показана схема из пяти участков автомобильных дорог между шестью деревнями. Известно, что длины этих участков — 1, 2, 4, 5 и 8 км в некотором порядке. Также известно, что все расстояния между деревнями (по дорогам) различны. Приведите пример такой схемы. Находить все возможные варианты не требуется.



(*К. А. Кноп*)

Ответ: Вот один из вариантов схемы.



Решение. Далее приведены рассуждения, которые могут помочь при построении схемы. Приводить подобные рассуждения в решении не требуется. Достаточно предъявить правильную схему дорог.

Шесть деревень дают 15 различных расстояний, поэтому нам нужно получить где-то расстояние не меньшее 15, причем набрать его не более чем тремя отрезками (дорогами). Это либо $2+5+8$, либо $4+5+8$. Деревни, между которыми расстояния 1 и 2, должны быть соседними, так как иначе не получить расстояние 3. Значит, вариант с $4+5+8$ не подходит. Тогда, не умаляя общности, 1 и 2 — длины двух верхних дорог, 5 и 8 — одна средняя и одна нижняя, а 4 — другая нижняя. Длина средней дороги не может быть равна 8, потому что иначе расстояние 13 встречается дважды — как $1+8+4$ и как $8+5$. Отсюда получаем ответ, причем он по существу единственный (в любом верном ответе на горизонтальном ребре написано 5, с одного из краев — 1 и 2, с другого края — 4 и 8).

Критерии.

(а) Приведена правильная схема — 7 баллов.

(б) Схема не совпадает по существу с авторской — 0 баллов.

3. На ленте 1×100 расставили натуральные числа от 1 до 100 в произвольном порядке. По этой таблице начал прыгать кузнечик. Когда он прыгает на какую-то клетку, то он получает столько очков, сколько написано на этой клетке, и одновременно теряет столько очков, сколько написано на той клетке, с которой он прыгнул. Какое наибольшее количество очков может быть у кузнечика после нескольких прыжков?

(*Н. П. Косаревский*)

Ответ: 99.

Решение. Если кузнечик стартовал с клетки, на которой написано число a, а сейчас находится на клетке с числом b, то у него $b-a$ очков, так как очки промежуточных клеток взаимно уничтожатся, так как в общей сумме число из клетки присутствуют со знаком "плюс когда кузнечик прыгнет в эту клетку, и со знаком "минус— - когда кузнечик прыгнет из этой клетки. Поэтому максимальное число очков у кузнечика может быть $99 = 100 - 1$, если он стартует с клетки 1 и закончит путь в клетке 100.

Критерии.

(а) Приведён только пример — 1 балл.

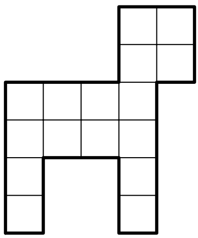
(б) Сказано, что сумма зависит от только от начальной и конечной клетки для конкретного примера —- 2 балла

(в) Доказан предыдущий пункт —- 3 балла

(г) В решении считают, что кузнечик начинает вне поля (с клетки 0) —- снимается 2 балла

(д) Полное решение — 7 баллов

4. Никодим взял листок 1000×1000 клеток и превратил его в таблицу умножения: в каждую клеточку написал произведение номера строки и номера столбца. В результате, например, в углах листка оказались написаны числа 1, 1000, 1000 и 1000000. Потом Никодим нарисовал на этом листке двух овечек по линиям сетки (см. рисунок). Может ли сумма чисел в одной овечке отличаться от суммы чисел в другой овечке на 2025? Овечек можно поворачивать и переворачивать.



(*Н. П. Косаревский*)

Ответ: Нет.

Решение. Закрасим все клетки, в которых стоят нечётные числа, в синий цвет. Тогда независимо от расположения овечки в ней будет закрашено ровно четыре клетки. Следовательно, сумма чисел в каждой овечке чётна, и две такие суммы не могут отличаться на 2025.

Критерии.

(а) Сформулировано утверждение: сумма чисел внутри овечки всегда чётна — 1 балл

(б) Есть незначительные продвижения в доказательстве чётности суммы чисел внутри овечки — 2 балла

(в) Четность суммы внутри овечки доказана частично: перебор по чётности столбцов и строк не полный — 4 балла

(г) Четность суммы внутри овечки доказана частично: расположение чётных и нечётных чисел в таблице не сформулировано — 4 балла

(д) Полное решение с арифметической ошибкой — 6 баллов

(е) Верное решение — 7 баллов

5. Чтобы сохранить древний манускрипт в тайне, был создан орден, каждый из 222 магистров которого хранит копию манускрипта в персональном сейфе. Сейфы открываются с помощью ключа, однако никто из магистров не имеет ключа от своего сейфа, но зато имеет 55 ключей от других сейфов. В кодексе ордена прописано, что сейф можно открыть в присутствии не менее трёх людей: хозяина сейфа, хозяина ключа и не менее одного магистра-свидетеля. Возможно ли так раздать ключи магистрам, чтобы любые три магистра при встрече могли получить доступ к манускрипту?

(*О. О. Обуховская*)

Ответ: Да. Можно.

Решение. Разделим всех магистров на две группы по 111 человек. Каждую группу магистров расставим по кругу. Каждому магистру выдаём 55 ключей от сейфов, следующих после него (по часовой стрелке) в его кругу 55 магистров. Три магистра смогут получить доступ к манускрипту, если у одного из них будет ключ от сейфа другого. Рассмотрим трёх произвольных магистров A, B, C. Двое из них, например, A и B, обязательно попадут в один круг. Пронумеруем всех магистров в этом кругу, начиная с A, присвоив магистру A номер 0. Если у A нет ключа от B, то номер B лежит в диапазоне $[56; 110]$. Но тогда у B него есть ключ от сейфа A, так как $56 + 55 = 111$.

Критерии.

(а) Только ответ — 0 баллов.

(б) Имеются незначительные ошибки в изложении решения — 6 баллов.

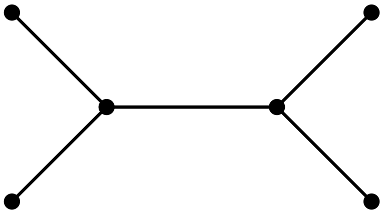
(в) Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы

Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
6 класс

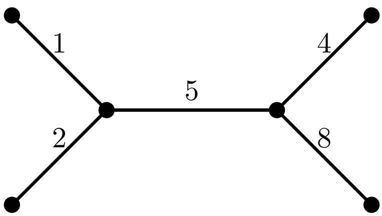
Решения

1. На рисунке показана схема из пяти участков автомобильных дорог между шестью деревнями. Известно, что длины этих участков — 1, 2, 4, 5 и 8 км в некотором порядке. Также известно, что все расстояния между деревнями (по дорогам) различны. Приведите пример такой схемы. Находить все возможные варианты не требуется.



(*К. А. Кноп*)

Ответ: Вот один из вариантов схемы.



Решение. Далее приведены рассуждения, которые могут помочь при построении схемы. Приводить подобные рассуждения в решении не требуется. Достаточно предъявить правильную схему дорог.

Шесть деревень дают 15 различных расстояний, поэтому нам нужно получить где-то расстояние не меньшее 15, причем набрать его не более чем тремя отрезками (дорогами). Это либо $2+5+8$, либо $4+5+8$. Деревни, между которыми расстояния 1 и 2, должны быть соседними, так как иначе не получить расстояние 3. Значит, вариант с $4+5+8$ не подходит. Тогда, не умаляя общности, 1 и 2 — длины двух верхних дорог, 5 и 8 — одна средняя и одна нижняя, а 4 — другая нижняя. Длина средней дороги не может быть равна 8, потому что иначе расстояние 13 встречается дважды — как $1+8+4$ и как $8+5$. Отсюда получаем ответ,причем он по существу единственный (в любом верном ответе на горизонтальном ребре написано 5, с одного из краев — 1 и 2, с другого края — 4 и 8).

Критерии.

(а) Наличие схемы из решения — 7 баллов.

(б) Существенно другая схема — 0 баллов.

2. Петя и Вася играют в игру. У Пети есть много карточек с цифрой 1 и много карточек с цифрой 5, а у Васи — много карточек с цифрой 2 и много карточек с цифрой 6. Мальчики по очереди кладут карточки в ряд, начинает Петя. Карточку можно класть только справа от предыдущей. Они оба хотят сложить число, которое делится на 22, и они могут договориться между собой. За какое наименьшее количество ходов ребята справятся с заданием?

(*С. Е. Розова*)

Ответ: 6 ходов.

Решение. Количество ходов четное, иначе на конце будет нечетная цифра и число не поделится на 2.

Рассмотрим суммы цифр на нечетных и четных позициях. Для 2 ходов : 1 или 5 и 2 или 6 Для 4 ходов: 2 или 6 или 10 и 4 или 8 или 12 Заметим, что среди наборов нет пар чисел, отличающихся на кратное 11, значит за 2 или 4 хода не получится

Пример на 6 ходов: 121616.

Критерии. Баллы за 2-4 критерии суммируются

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Доказано, что за 2 и 4 хода нельзя — 3 балла

(в) Приведен пример для 6 ходов — 2 балла.

(г) Доказано, что число ходов должно быть четным — 2 балла.

3. Чтобы сохранить древний манускрипт в тайне, был создан орден, каждый из 222 магистров которого хранит копию манускрипта в персональном сейфе. Сейфы открываются с помощью ключа, однако никто из магистров не имеет ключа от своего сейфа, но зато имеет 55 ключей от других сейфов. В кодексе ордена прописано, что сейф можно открыть в присутствии не менее трёх людей: хозяина сейфа, хозяина ключа и не менее одного магистра-свидетеля. Возможно ли так раздать ключи магистрам, чтобы любые три магистра при встрече могли получить доступ к манускрипту?

(*О. О. Обуховская*)

Ответ: Да. Можно.

Решение. Разделим всех магистров на две группы по 111 человек. Каждую группу магистров расставим по кругу. Каждому магистру выдаём 55 ключей от сейфов следующих после него (по часовой стрелке) в его кругу 55 магистров. Три магистра смогут получить доступ к манускрипту, если у одного из них будет ключ от сейфа другого. Рассмотрим трёх произвольных магистров A, B, C. Двое из них, например, A и B, обязательно попадут в один круг. Пронумеруем всех магистров в этом кругу, начиная с A, присвоив магистру A номер 0. Если у A нет ключа от B, то номер B лежит в диапазоне $[56; 110]$. Но тогда у B него есть ключ от сейфа A, так как $56 + 55 = 111$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Правилен только ответ — 0 баллов

(в) Любая попытка доказать невозможность — 0 баллов.

4. Аня сложила из доминошек прямоугольник 2×5. Боря не смотрит на прямоугольник, но может про любые две клетки спросить у Ани, принадлежат ли эти клетки одной доминошке или нет. Сможет ли Боря узнать расположение всех доминошек в прямоугольнике за три вопроса?

(*А. Н. Пичугина, Б. Ю. Пичугин*)

Ответ: Да, сможет

Решение. Обозначим строки цифрами 1 и 2, а столбики буквами a, b, c, d, e. Первым ходом проверяем вертикальную доминошку $c1 - c2$. Если это целая доминошка, то за два оставшихся хода разбираемся с левым и правым квадратами. Если не целая, то следующим ходом проверяем горизонтальную доминошку $b1 - c1$. Если она целая, то ходом $e1 - e2$ узнаём все доминошки. Если не целая, то третий ход $a1 - a2$. (Основное соображение, контролирующее правильность алгоритма: всего есть 8 вариантов расположить доминошки. Каждым ходом мы должны отсекать ровно половину вариантов.)

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Правильный ответ, неправильный или не приведён в принципе алгоритм нахождения правильной комбинации — 1 балл

(в) Алгоритм неполный или в алгоритме имеются незначительные ошибки — 5 баллов

5. В квадрат 2025×2025 расставили последовательные нечётные числа от 1 до $2 \cdot 2025^2 - 1$ (сначала заполнили первую строку слева направо, затем также вторую, третью и т.д). Далее на какое-то из простых чисел этой доски поставили коня, который бьёт 8 других клеток квадрата. Могут ли все побитые им числа быть простыми?

(*С. Е. Розова, В. Е. Зверев, К. А. Кноп*)

Ответ: Нет

Решение. Заметим, что если конь стоит на числе a, то он бьёт числа:

$$a - 4n - 2$$

$$a - 4n + 2$$

$$a - 2n - 4$$

$$a - 2n + 4$$

$$a + 2n - 4$$

$$a + 2n + 4$$

$$a + 4n - 2$$

$$a + 4n + 2$$

В нашем случае $n = 2025$ и рассмотрение различных вариантов делимости n не требуется. Рассмотрим остатки по модулю 3.

a - простое число, значит оно 1 или 2 по модулю 3. 0 оно быть не может, так как единственное такое простое число - это сама тройка, но она стоит всегда с краю и не может бить все 8 клеток. И вообще из всех наших девяти чисел тройке может равняться только первое — $a - 4n - 2$.

На n у нас ограничений нет, поэтому оно может быть 0, 1 или 2 по модулю 3. Переберём варианты: $a \equiv 1$, $n \equiv 0$, но тогда число $a + 4n + 2$ делится на 3. Аналогично. $a \equiv 1$, $n \equiv 1$: $a + 4n - 2$

$a \equiv 1$, $n \equiv 2$: $a + 2n + 4$

$a \equiv 2$, $n \equiv 0$: $a + 4n - 2$

$a \equiv 2$, $n \equiv 1$: $a + 2n - 4$

$a \equiv 2$, $n \equiv 2$: $a + 4n + 2$

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Замечена повторяемость остатков по модулю 3 или 5 — 1 балл

(в) Решение с недочётами: не доказано, что все числа, кратные трём/пяти находятся в одних столбцах, не доказано, что среди клеток на которых стоит конь и которые бьёт этот конь, есть все остатки по рассматриваемому модулю — 5 баллов

Олимпиада
Юношеской математической школы

Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
7 класс

Решения

1. В магазине продаются много видов йогуртов, каждый по своей цене. Известно, что любой покупатель, у которого в кармане миллион рублей, сможет купить 12 бутылок любого йогурта и пять бутылок любого другого йогурта в придачу. Докажите, что любой миллионер сможет купить десять бутылок любого йогурта и семь бутылок любого другого йогурта в придачу.

(*М. А. Антипов*)

Решение. Пусть миллионер хочет купить десяток бутылок по цене X и семь бутылок по цене Y. По условию, каждая из сумм 12X+5Y и 12Y+5X не превосходит миллиона.

Заметим, что если $X \geqslant Y$, то $12X + 5Y = 10X + 2X + 5Y \geqslant 10X + 7Y$. А если $X < Y$, то аналогично $5X + 12Y > 10X + 7Y$. В обоих случаях, наша суммарная покупка $10X + 7Y$ тоже не превосходит миллиона, что и требовалось.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Есть решение с рассмотрением двух самых дорогих йогуртов, но четко не показано, почему всё получится для любой другой пары — 3 балла

2. В вершинах куба расставили различные простые числа, большие трёх. Докажите, что можно выбрать грань, на которой сумма каких-то двух чисел, стоящих по диагонали, не делится на 6.

(*К. Д. Пронин*)

Решение. Пусть из вершины A куба выходят ребра AB, AC, AD, тогда отрезки BC, BD, CD — диагонали граней куба. Пусть в вершинах B, C, D стоят простые числа, большие 3, значит они не кратны трем — при делении на три дают остатки 1 или 2. Какие то два из этих трех остатков совпадают, в этом случае сумма двух соответствующих чисел не делится на 3, а тем более на 6. То есть искомая диагональ найдена.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Замечено, что простые числа дают остаток 1 или 5 по модулю 6 — 1 балл (или эквивалентное рассуждение про четность и 1 или 2 по модулю 3)

(в) Попытка (неудачная) покрасить диагонали в два цвета — не больше 3 баллов

(г) Сказано, что найдутся три числа, такие что каждые два лежат на диагонали, но не показано, как — 5 баллов

3. В стране 800 городов и нет дорог. Два наследника престола готовятся разделить её на две равные части (по 400 городов). Король, перед тем как сдать дела, хочет всё же провести несколько дорог, но так, чтобы при любом возможном разделе наследникам досталось поровну дорог (наследнику достаётся дорога, если ему достались оба конца этой дороги). Сможет ли он это сделать, построив ровно 3000 дорог?

(*М. А. Антипов*)

Ответ: Нет, не сможет.

Решение. Пусть при некотором разделении страны (на равные части) X дорог осталось у одного наследника, Y – у другого, еще Z дорог проходят между разделенными частями. Тогда сумма количеств дорог, выходящих из городов первого наследника, равна $2X+Z$, из городов второго — $2Y+Z$. По условию, $X = Y$, поэтому $2X + Z = 2Y + Z$.

Итак, при любом разделении на равные части суммы количеств дорог, выходящих из городов первого и городов второго наследников, совпадают. Отсюда следует, что из каждого города выходит одно и то же число дорог (при любом разбиении из любого города A выходит столько же дорог, сколько из города B второго наследника, иначе при обмене городами A и B между наследниками баланс нарушится). Обозначим это постоянное число дорог k, тогда общее число дорог равно $\frac{800k}{2} = 400k$. Однако указанное в условии число дорог 3000 не делится на 400.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Замечено, что степень всех вершин одинаковая, но этот факт не доказан – не больше 2 баллов

(в) Доказано, что степень всех вершин одинаковая — 5 баллов

(г) Идея, что в каждой половине (при любом разделении) должно быть одинаковое число дорог — 3 балла

(д) Приведено одно разделение на половины и сказано, что в них равное число дорог — 1 балл

4. a, b, c, n — различные натуральные числа. Сумма $a! + b! + c!$ делится на 728^n, а каждое из слагаемых в этой сумме — не делится. Докажите, что какие то из чисел a, b, c отличаются менее чем на 15.

Напомним, что $a!$ — это произведение всех чисел от 1 до a, т.е. $a! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a$.

(М. А. Антипов)

Решение. Предположим, не умаляя общности, что $a < b < c$. Тогда

$$a! + b! + c! = a!(1 + B + C),$$

где за B обозначено произведение чисел от $a + 1$ до b, а за C — произведение чисел от $a + 1$ до c. Поскольку, по условию, $a!$ не делится на 728^n, а $a!(1 + B + C)$ — делится, число $1 + B + C$ содержит какой-то простой множитель p числа $728^n = (7 \cdot 8 \cdot 13)^n$, то есть оно делится на $p = 2, 7$ или 13. Если бы b отличалось от a более, чем на 15, то произведение B, а тем более произведение C содержало бы не меньше 15 последовательных целых чисел. Тогда оба этих произведения заведомо содержали бы хотя бы одно число, кратное p, то есть мы получили бы, что $B+C$ делится на p, а значит $B + C + 1$ — не делится. Противоречие, значит b и a отличаются менее чем на 15.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Числа упорядочили и вынесли меньший факториал за скобки — 2 балла

(в) Решение задачи в случае конкретного числа n — 3 балла

5. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ задана следующими правилами: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для всех $n = 3, 4, \ldots, 100$. Сколько натуральных чисел представимы в виде суммы трёх различных элементов последовательности?

(С. А. Лучинин)

Ответ: 157140.

Решение. Нетрудно видеть, что последовательность возрастающая. Заметим, что для любых $i > j > k$ верно, что $a_i \geqslant a_j + a_k$, причём равенство возможно только в случае $j = i - 1$, $k = i - 2$. Значит, при

$i > j$ и $x > y$ равенство $a_i + a_j = a_x + a_y$ возможно только если $i = x$ и $j = y$ (отметим это факт $\star$). Действительно, если $x \neq i$ (пусть $i > x$), то $a_i + a_j \geqslant a_x + a_y + a_j > a_x + a_y$. Значит, $x = i$, и $y = j$.

Предположим, что для некоторого S верно, что $S = a_i + a_j + a_k = a_x + a_y + a_z$, где $i > k > k$ и $x > y > z$. Если любой из первых трех членов равен любому из вторых трех, то суммы оставшихся пар чисел равны, что невозможно из-за $\star$. Следовательно, числа i, j, k, x, y, z различны, и пусть i — наибольшая из них. Если $(x, y) \neq (i-1, i-2)$, то $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \geqslant a_x + a_y + a_z$, противоречие (последнее неравенство верно из того, что или $a_x + a_y \leqslant a_{i-1}$, или $x = i-1$ и $a_y + a_z \leqslant a_{i-2}$). Значит, $x = i-1$ и $y = i-2$. Но тогда $a_z = a_j + a_k$, то есть $j = z-1$ и $k = z-2$.

Мы получили, что каждое натуральное число представляется в виде суммы различных $a_i + a_j + a_k$ одним, двумя или нулем способами, причём количество чисел, представимых двумя способами столько же, сколько способов выбрать шесть различных чисел вида $(i, i-1, i-2, z, z-1, z-2)$ (каждому такому способу соответствует число $S = a_i + a_{z-1} + a_{z-2} = a_{i-1} + a_{i-2} + a_z$). Всего таких способов $95 + 94 + \ldots + 1 = 95 \cdot 96/2 = 4560$, так как для каждого $6 \leqslant i \leqslant 100$, верно $z-2 \in \{1, 2, \ldots, i-5\}$. Всего есть $C_{100}^3 = 161700$ способов выбрать три различных элемента последовательности, и 4560 чисел можно получить двумя способами. Следовательно, ответ $161700 - 4560 = 157140$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Мотивированное появление числа 161700 —- 1 балл

Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
8 класс

Решения

1. Различные натуральные числа a, b, c, d таковы, что $\min(a, b) = 3$, $\min(b, c) = 1$, $\max(a, c) = 3$, $\max(c, d) = 5$. Найдите минимальное возможное значение суммы $a + b + c + d$.

(*С. А. Лучинин*)

Ответ: 13.

Решение. Из условия $\min(a, b) = 3$ получаем, что $a \geqslant 3$ и $b \geqslant 3$. Так как $\min(b, c) = 1$, а $b \geqslant 3$, то $c = 1$. Тогда из $\max(a, c) = 3$ и $\max(c, d) = 5$ имеем $a = 3$ и $d = 5$. На b осталось единственное условие, что $b \geqslant 3$. А так как числа различные, то минимальное значение b это 4. То есть минимальное значение суммы $a + b + c + d$ равно $3 + 4 + 1 + 5 = 13$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Имеются незначительные ошибки в обосновании или арифметическая ошибка в окончательном результате — 5-6 баллов.

(в) Приведён только верный ответ со значениями переменных — 1 балл.

(г) Дан только ответ без значений переменных — 0 баллов.

2. В классе учатся 26 человек, среди которых есть Серёжа, который дружит с каждым из остальных 25 учеников (дружба взаимна). Оказалось, что для любого способа выстроить всех детей в колонну друг за другом, в которой Серёжа стоит первым, верно, что каждый знает не менее половины людей перед ним. Докажите, что есть ученик, отличный от Серёжи, который также дружит со всеми учениками класса.

(*С. А. Лучинин*)

Решение. Заметим, что если кто-то не дружит с хотя бы двумя людьми (пусть ученик A не дружит с учениками B и C), то в колонне, начинающейся с учеников «Серёжа, B, C, A, …» не выполняется условие для A. Следовательно, каждый дружит хотя бы с 24 учениками класса. Предположим, что нет ученика, отличного от Серёжи, который дружит со всеми учениками класса. Тогда каждый, кроме Серёжи, дружит с 24 учениками, а Серёжа с 25. Но тогда всего дружб $\frac{25\cdot 24+25}{2}$, что является не целым числом. Противоречие. Значит, такой ученик найдется.

Критерии.

(а) Доказано, что все 25 учеников дружат со всеми, кроме ровно одного, а дальнейшее решение либо отсутствует, либо неверно (в том числе разборы частных случаев) — 1 балл

(б) Идея доказательства верна, но не хватает обоснованности утверждений — 5 баллов

(в) Решение полное, обоснованное — 7 баллов

3. Докажите, что в каждом из чисел 53^2, 533^2, $\ldots$, $5\underbrace{3\ldots3}_{10000}{}^2$ все цифры, кроме последней, чётные.

(*К. А. Кноп*)

Решение. Докажем индукцией по n, что

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n})^2 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}9.$$

База при $n = 1$: $53\cdot 53 = 2809$.

Переход. Пусть мы доказали для n, докажем для $n+1$. Хотим доказать

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n+1})^2 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n}0\underbrace{88\ldots88}_{n}9.$$

Заметим, что

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n+1})^2 = (10\cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n}+3)^2 = 100\cdot(5\underbrace{33\ldots33}_{n})^2 + 60\cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n}+9$$

Пользуясь индукционным предположением и тем, что $6\cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n} = 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}8$ (проверяется умножением в столбик) мы можем продолжить равенство:

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}900 + 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}80 + 9 =$$

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}800 + (100 + 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}80 + 9) =$$

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}800 + 32\underbrace{00\ldots00}_{n-1}89 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n}0\underbrace{88\ldots88}_{n}9,$$

что и требовалось доказать.

Критерии.

(а) Полное решение —– 7 баллов.

(б) Имеются незначительные ошибки в обосновании —– 5 баллов.

(в) Имеются значительные ошибки в доказательстве —– 2-3 балла.

(г) Приведена идея, но само доказательство неверное —– 1 балл.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Точка K — середина отрезка BD. Оказалось, что $\angle AKC = 90^\circ$. Докажите, что $3AC \geqslant AB + BC$.

(*С. А. Лучинин, К. А. Бельский*)

Решение. Отметим точку T так, что K будет серединой отрезка CT. Тогда четырёхугольник $CDTB$ параллелограмм, так как его диагонали делятся точкой пересечения пополам. Треугольник ACT равнобедренный, так как медиана из точки A совпадает с высотой. Следовательно, $BT = CD$ и $AT = AC$. По неравенству треугольника $AT + BT \geqslant AB$. Заменяя AT на AC и BT на CD получаем $AC+CD \geqslant AB$. Аналогично, $AC+AD \geqslant BC$. Складывая эти два неравенства, получаем требуемое.

Критерии.

(а) Доказаны вспомогательные факты про описанную окружность около AKC, но дальнейшее продвижение отсутствует или неверно — 2 балла

(б) В целом, идея доказательства неравенства верна, но реализация содержит пробелы — 5 баллов

(в) Решение полное, доказательство обоснованное — 7 баллов

5. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ задана следующими правилами: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для всех $n = 3, 4, \ldots, 100$. Сколько натуральных чисел представимы в виде суммы трёх различных элементов последовательности?

(*С. А. Лучинин*)

Ответ: 157140.

Решение. Нетрудно видеть, что последовательность возрастающая. Заметим, что для любых $i > j > k$ верно, что $a_i \geqslant a_j + a_k$, причём равенство возможно только в случае $j = i - 1$, $k = i - 2$. Значит, при

$i > j$ и $x > y$ равенство $a_i + a_j = a_x + a_y$ возможно только если $i = x$ и $j = y$ (отметим это факт $\star$). Действительно, если $x \neq i$ (пусть $i > x$), то $a_i + a_j \geqslant a_x + a_y + a_j > a_x + a_y$. Значит, $x = i$, и $y = j$.

Предположим, что для некоторого S верно, что $S = a_i + a_j + a_k = a_x + a_y + a_z$, где $i > k > k$ и $x > y > z$. Если любой из первых трех членов равен любому из вторых трех, то суммы оставшихся пар чисел равны, что невозможно из-за $\star$. Следовательно, числа i, j, k, x, y, z различны, и пусть i — наибольшая из них. Если $(x, y) \neq (i-1, i-2)$, то $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \geqslant a_x + a_y + a_z$, противоречие (последнее неравенство верно из того, что или $a_x + a_y \leqslant a_{i-1}$, или $x = i-1$ и $a_y + a_z \leqslant a_{i-2}$). Значит, $x = i-1$ и $y = i-2$. Но тогда $a_z = a_j + a_k$, то есть $j = z-1$ и $k = z-2$.

Мы получили, что каждое натуральное число представляется в виде суммы различных $a_i + a_j + a_k$ одним, двумя или нулем способами, причём количество чисел, представимых двумя способами столько же, сколько способов выбрать шесть различных чисел вида $(i, i-1, i-2, z, z-1, z-2)$ (каждому такому способу соответствует число $S = a_i + a_{z-1} + a_{z-2} = a_{i-1} + a_{i-2} + a_z$). Всего таких способов $95 + 94 + \ldots + 1 = 95 \cdot 96/2 = 4560$, так как для каждого $6 \leqslant i \leqslant 100$, верно $z-2 \in \{1, 2, \ldots, i-5\}$. Всего есть $C_{100}^3 = 161700$ способов выбрать три различных элемента последовательности, и 4560 чисел можно получить двумя способами. Следовательно, ответ $161700 - 4560 = 157140$.

Критерии.

(а) Рассмотрены тройки чисел(члены последовательности) и показано, что они не однозначно определяют сумму, количество не посчитано — 1 балл

(б) Посчитано количество повторяющихся наборов троек чисел в сумме, дальнейших продвижений нет, либо они неверны — 2 балла

(в) В целом решение верное (посчитаны количества троек и повторяющихся наборов), но либо нет полноты доказательства, либо арифметические ошибки в окончательных результатах — 5 баллов

(г) Решение полное, обоснованное, ответ правильный — 7 баллов

Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
9 класс

Решения

1. Существуют ли такие 2025 последовательных чисел, сумма которых является кубом натурального числа?

(*И.М. Мительман*)

Ответ: Да.

Решение. Например, это числа от $2025^2 - 1012$ до $2025^2 + 1012$, сумма которых равна 2025^3.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Правильный пример чисел без обоснования, что он подходит — 3 балла

(в) Правильный пример с указанием, куб какого числа получается — 5 баллов

2. На каждой из 2025 белых карточек написано натуральное число, так что все числа различны. Андрей смотрит на эти карточки, и если видит, что число на одной карточке вдвое меньше, чем на другой, то красит карточку с меньшим числом в красный цвет, а карточку с большим числом — в синий. Если какая-то карточка покрашена и в красный, и в синий цвет, то она становится фиолетовой. В некоторый момент у Андрея не осталось карточек, которые он мог бы покрасить по указанным правилам. Оказалось, что сумма чисел на синих карточках в пять раз больше суммы чисел на красных. Докажите, что какие-то два числа на карточках отличаются ровно в 8 раз.

(*А.А. Солынин*)

Решение. Разобьем все числа на максимальные по включению группы вида $\{x, 2x, 2^2x, \ldots, 2^nx\}$ (то есть числа $x, 2x, \ldots, 2^nx$ присутствуют на карточках, а числа $x/2$ и $2^{n+1}x$ — нет). Предположим, что в каждой группе не более трех чисел. Заметим, что если в группе хотя бы два числа, то самое большое число в группе будет покрашено в синий, самое маленькое — в красный, остальные — в фиолетовый. Так как в каждой группе не более трёх чисел, то в каждой группе синее число больше красного не более, чем в 4 раза. То есть сумма чисел на синих карточек больше суммы на красных карточек не более, чем в 4 раза. Противоречие. Значит, в какой-то группе хотя бы четыре числа и, значит, какие-то два из них отличаются в 8 раз.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Решение в целом верное, не упоминается разбиение на непересекающиеся группы — 5 баллов

3. Вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$ имеет стороны $AB = 32$, $BC = 5$, $CD = 45$, $DA = 60$. Найдите угол между прямыми AB и CD.

(*В.А. Ясинский*)

Ответ: $90°$.

Решение. Продлим прямые AB и CD до пересечения в точке M, Из подобия треугольников MBC и MDA находим, что $BM = 4$ и $CM = 3$. Угол, указанный в ответе, следует из теоремы, обратной теореме Пифагора.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Замечено подобие треугольников MBC и MDA и вычислен коэффициент подобия — 1 балл

(в) Ответ с арккосинусами или любые неточные вычисления - 3 балла

(г) Посчитаны отрезки BM и CM — 3 балла

4. a, b, c, d — натуральные числа такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{bcd}{a} + \frac{acd}{b} + \frac{abd}{c} + \frac{abc}{d}.$$

Докажите, что число $a + b + c + d$ составное.

(*К. А. Бельский*)

Решение. Домножим равенство из условия на $abcd$ и перенесем все слагаемые в левую часть.

$$a^3bcd + b^3acd + c^3abd + d^3abc - (bcd)^2 - (acd)^2 - (abd)^2 - (abc)^2 = 0.$$

Указанная левая часть равна $(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc)$, то есть, мы получаем, что произведение каких то двух из четырех натуральных чисел в условии равно произведению двух оставшихся чисел.

Пусть, например, $ab = cd$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $a+b+c+d = a+b+c+\frac{ab}{c} = \frac{(a+c)(b+c)}{c}$. Очевидно, что это число, будучи целым, составное: (эту дробь можно сократить до целого числа, последовательно сокращая простые множители c и какие-то простые множители чисел $a+c$ и $b+c$. Поскольку оба этих числа больше c, то и после всех сокращений они останутся множителями, большими 1, поэтому их произведение (равное $a+b+c+d$) — составное число.

Критерии.

(a) Полное решение — 7 баллов.

5. На плоскости отмечено 1000 точек. Отмеченные точки, находящиеся на расстоянии не более 1 см, соединены ребром. Оказалось, что каждую отмеченную точку можно покрасить в один из 10 цветов так, чтобы любые точки, соединённые ребром, были разных цветов. Докажите, что проведено не более 22500 рёбер.

(*А. Н. Коншин*)

Решение. Предположим, что степень некоторой вершины A хотя бы 46. Тогда все соседи A покрашены в цвета, отличные от цвета A, то есть в один из 9 оставшихся цветов. По принципу Дирихле какой-то цвет среди соседей A встречается хотя бы $\frac{46}{5}$ раз, то есть хотя бы 6 раз. Пусть это красный цвет. Тогда опять же по принципу Дирихле среди 6 красных соседей A найдутся две вершины B и C такие, что $\angle BAC \leqslant \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Но тогда в треугольнике ABC стороны AB и AC не больше 1, так как B и C соединены ребром с A, и сторона BC не наибольшая, так как $\angle BAC \leqslant 60^\circ$. Следовательно, $BC \leqslant 1$. То есть между одноцветными вершинами B и C есть ребро, противоречие.

Мы получили, что степень каждой вершины не превосходит 45. Тогда суммарно проведено не более $\frac{1000\cdot 45}{2} = 22500$, что и требовалось доказать.

Критерии.

(a) Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы

Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
10 класс

Решения

1. Боги Тлалок и Юй-Ши играют в следующую игру. За один ход можно пролить на Землю не менее 100, но строго менее 200 литров дождя (количество пролитых литров не обязательно целое). Ходят они по очереди, начинает Тлалок. Выигрывает тот бог, после чьего хода они вдвоём прольют на Землю целое количество тонн (т.е. тысяч литров) дождя. Имеет ли кто-нибудь из них стратегию, позволяющую гарантированно выиграть у соперника?

(*А.А. Солынин*)

Ответ: Не имеет.

Решение. Покажем, что каждый из богов может не дать сопернику выиграть следующим ходом. В самом деле, рассмотрим число r — остаток суммарного количества пролитого дождя (в литрах) по модулю 1000. (Заметим, что r не обязательно целое.) Если $r > 700$ (пусть тогда $r = 700 + \epsilon$), то прольём $200 - \frac{\epsilon}{2}$ дождя, и тогда следующим ходом выиграть невозможно. А если $r \leqslant 700$, то можно пролить 100 литров дождя, и снова следующим ходом выиграть невозможно. Таким образом, никто не имеет выигрышной стратегии.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Плохое обоснование возможности сделать ход не в проигрышный интервал или другие недочёты — 5-6 баллов, в зависимости от существенности недочётов

(в) Доказательство отсутствия есть, но состоит из малообоснованных предположений — не более 3 баллов

(г) Неверный ответ или верный ответ без идей – 0 баллов

2. Докажите, что в каждом из чисел 53^2, 533^2, $\ldots$, $5\underbrace{3\ldots3}_{10000}{}^2$ все цифры, кроме последней, чётные.

(*К.А.Кноп*)

Решение. Докажем индукцией по n, что

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n})^2 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}9.$$

База при $n = 1$: $53 \cdot 53 = 2809$.

Переход. Пусть мы доказали для n, докажем для $n+1$. Хотим доказать

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n+1})^2 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n}0\underbrace{88\ldots88}_{n}9.$$

Заметим, что

$$(5\underbrace{33\ldots33}_{n+1})^2 = (10 \cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n}+3)^2 = 100 \cdot (5\underbrace{33\ldots33}_{n})^2 + 60 \cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n}+9$$

Пользуясь индукционным предположением и тем, что $6 \cdot 5\underbrace{33\ldots33}_{n} = 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}8$ (проверяется умножением в столбик) мы можем продолжить равенство:

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}900 + 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}80 + 9 =$$

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}800 + (100 + 31\underbrace{99\ldots99}_{n-1}80 + 9) =$$

$$= 28\underbrace{44\ldots44}_{n-1}0\underbrace{88\ldots88}_{n-1}800 + 32\underbrace{00\ldots00}_{n-1}89 = 28\underbrace{44\ldots44}_{n}0\underbrace{88\ldots88}_{n}9,$$

что и требовалось доказать.

Критерии.

(а) Приведен явный вид $53\ldots3^2$, без доказательства — 0 баллов

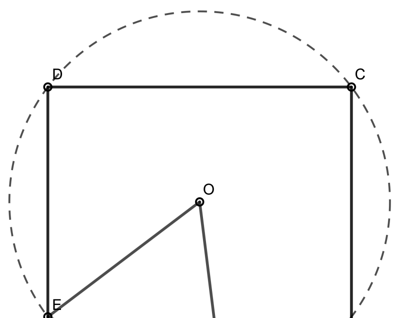
(б) Проигнорированы переносы через разряд — 0 баллов

(в) Арифметические ошибки — снимается до 3 баллов

(г) Полное решение — 7 баллов

3. Окружность с центром O проходит через вершины C, D квадрата $ABCD$, а стороны AD и AB пересекает в таких точках E и F соответственно, что $\angle EOF = 60°$. Найдите радиус окружности, если $AB = 3$.

(*К.А. Кноп*)



Ответ: $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$.

Решение. EDC — вписанный прямоугольный треугольник, откуда EC — диаметр окружности. Если ввести систему координат так, чтобы $A=(0,0)$ и $B=(3,0)$, то центр круга лежит на прямой $x=1.5$. Пусть он имеет координаты $(1.5, 3-y)$, тогда $E=(0,3-2y)$. Кроме того, пусть $F=(x,0)$. Тогда для равностороннего треугольника EOF имеем два уравнения на стороны: $x^2+(3-2y)^2=1.5^2+y^2=(x-1.5)^2+(3-y)^2$. Решив эту систему, находим $x=\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}/2$, откуда и получается значение ответа для радиуса.

Критерии.

(а) Неполный счет — 0 баллов

(б) Не отброшены неподходящие решения уравнения, все остальное верно — 5-6 баллов

(в) Полное решение — 7 баллов

4. Числа a, b, c вещественны и $a+b+c=0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3>0$ тогда и только тогда, когда $a^5+b^5+c^5>0$.

(*British MO, 2004*)

Решение. Подставив $c=-a-b$, убедимся, что

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b),$$

и аналогично,

$$a^5+b^5+c^5=-(5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4)=$$

$$=\frac{5}{3}\left(\frac{(a+b)^2+a^2+b^2}{2}\right)(a^3+b^3+c^3).$$

Если и сумма кубов, и сумма пятых степеней положительны, то числа a и b оба не могут быть равны 0, поэтому выражение в первой скобке положительно, что и доказывает требуемое.

Критерии.

(а) Доказано, что $a^3+b^3+c^3=3abc$ — 1 балл

(б) Не разобран случай, когда одно из чисел равно нулю — 6 баллов

(в) Используются недоказанные формулы, не являющиеся общеизвестными — не больше 5 баллов

(г) Арифметические ошибки, остальное верно — снимается 1-2 балла

(д) Полное решение — 7 баллов

5. На плоскости отмечено 1000 точек. Отмеченные точки, находящиеся на расстоянии не более 1 см, соединены ребром. Оказалось, что каждую отмеченную точку можно покрасить в один из 10 цветов так, чтобы любые точки, соединённые ребром, были разных цветов. Докажите, что проведено не более 22500 рёбер.

(*А. Н. Коншин*)

Решение. Предположим, что степень некоторой вершины A хотя бы 46. Тогда все соседи A покрашены в цвета, отличные от цвета A, то есть в один из 9 оставшихся цветов. По принципу Дирихле какой-то цвет среди соседей A встречается хотя бы $\frac{46}{5}$ раз, то есть хотя бы 6 раз. Пусть это красный цвет. Тогда опять же по принципу Дирихле среди 6 красных соседей A найдутся две вершины B и C такие, что $\angle BAC \leqslant \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Но тогда в треугольнике ABC стороны AB и AC не больше 1, так как B и C соединены ребром с A, и сторона BC не наибольшая, так как $\angle BAC \leqslant 60^\circ$. Следовательно, $BC \leqslant 1$. То есть между одноцветными вершинами B и C есть ребро, противоречие.

Мы получили, что степень каждой вершины не превосходит 45. Тогда суммарно проведено не более $\frac{1000 \cdot 45}{2} = 22500$, что и требовалось доказать.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада
Юношеской математической школы

Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
11 класс

ЮМШ ЮМШ

Решения

1. Докажите, что существует натуральное число, кратное тысяче, в двоичной записи которого ровно тысяча нулей и тысяча единиц.

(*Фольклор*)

Решение 1. Рассмотрим числа $125 = 1111101_2$ и $375 = 101110111_2$. В первом 6 единиц и 1 нуль, во втором — 7 единиц и 2 нуля. Если выписать двоичную строку, в которой один раз записать 125 и затем 142 раза записать 375, то получим число, в котором $6 + 142 \cdot 7 = 1000$ единиц и $1 + 142 \cdot 2 = 285$ нулей. Добавив в конец этой строки еще $1000 - 285 = 715$ нулей, получим двоичную запись требуемого числа: оно делится на 125 по построению и делится на 8, так как его двоичная запись заканчивается на много нулей.

Решение 2. Заметим, что $44000_{10} = 1010101111100000_2$ состоит из 8 единиц и 8 нулей. Повторив эту двоичную строку 125 раз, получим число из 1000 единиц и 1000 нулей, очевидно, кратное 1000.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Конструкция почти сделана в двоичной системе, но ошибка в один лишний символ, которую можно доделать — 4 балла

(в) Пример числа без доказательства — 3 балла

2. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Сколько различных вещественных корней имеет уравнение $f(f(...f(x)...)) = x$, где функция применена 100 раз?

(*Фольклор*)

Ответ: Единственный корень $x = 2$.

Решение. Единственность корня следует из неравенства $f(x) \geq x$, выполненного для всех $x \in \mathbb{R}$.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов

(б) Проверено, что X=2, является корнем — 1 балл

(в) Показано, что $f(x) > x$, но потом не показано явно, как это применить для $f(f(f(\ldots$ — 5 баллов

(г) Если в цепочке неравенства строгие, то штраф в 1 балл

3. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в верхнем полупространстве, его вершина A находится в начале координат. Расстояния от вершин B, D и A_1 до плоскости $z = 0$ равны 1, 2 и 5. Чему равно расстояние от вершины C_1 до этой плоскости?

(Обозначения вершин стандартные: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты с вершинами именно в таком порядке, A соединена ребром с A_1, B — с B_1, C — с C_1, D — с D_1.)

(*К.А. Кноп*)

Ответ: 8.

Решение. Искомое расстояние — это апликата вектора $\overrightarrow{AC_1}$. Но $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Но апликаты трёх последних векторов равны 1, 2 и 5 соответственно, а у суммы этих векторов, соответственно, апликата равна 8.

Критерии.

(а) Только ответ —– 0 баллов

(б) Полное решение —– 7 баллов

4. В стране 1000 городов. Между некоторыми парами городов действуют авиалинии (для каждой пары городов не более одной), всего между городами проложено 200000 авиалиний. В одном из городов находится невидимый вор, которого ищет воздушная полиция. За один ход вор перемещается из города в другой, используя одну авиалинию. Полиция за свой ход должна закрыть одну авиалинию и взамен открыть другую авиалинию (возможно, закрытую ранее, возможно, ранее не существовавшую). Ходят по очереди, начиная с вора. Если вор не может сделать ход (то есть окажется в городе, из которого невозможно никуда вылететь), то он становится видимым, и воздушная полиция его ловит. Докажите, что воздушная полиция сможет поймать вора.

(*А.А. Солынин*)

Решение. Разделим все города на две республики. Пусть изначально в республике А сосредоточены все 1000 городов, а республика В пуста. Действия полиции таковы: возьмём какой-нибудь город x из республики А, за несколько ходов закроем все авиалинии, соединяющие X с остальными городами (построив при этом новые авиалинии либо внутри A, либо внутри B), переведём X в республику B, после чего его можно будет соединять с другими городами республики B. Вор не может находиться в республике B — изначально его там нет (в пустой-то республике!), и появиться он никак не может. Если мы таким образом перенесём все города в B, то вор проиграет.

Единственный вопрос — сможем ли мы строить авиалинии, отсоединяя город. Предположим противное: пусть в некоторый момент в A остался $a+1$ город, в B — $999-a$ городов. Если всего авиалиний не более $\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(999-a)(998-a)}{2}$, то мы можем отсоединить очередной город от A (у нас есть запас неоткрытых авиалиний). Таким образом, алгоритм не сработает, только если $\frac{a(a-1)}{2}+\frac{(999-a)(998-a)}{2}<200000$. Умножив это неравенство на 2 и раскрыв скобки, получим $a^2-a+a^2-1997a+997002<400000$, $2a^2-1998a+997002<400000$, $a^2-999a+298501<0$. Но дискриминант левой части меньше нуля, т.е. левая часть не может быть отрицательной.

Критерии.

(а) Полное решение — 7 баллов.

(б) Только ответ – 0 баллов

(в) Есть идея разбиения на проверенные и непроверенные города и перекладывания из одной части в другую – 3 балла

(г) Если кроме этой идеи предпринята попытка проверить,что этот план проходит, но неудачная — 4 балла

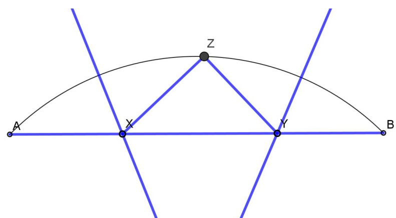
(д) Кроме этой идеи предпринята более или менее успешная попытка что-то посчитать — 5/6 баллов, в зависимости от существенности недочётов

(е) Выделение 633 вершин без дальнейшей идеи перекладывания – 0 баллов

5. Дан отрезок AB. Точки X и Y выбираются на отрезке AB так, что X лежит между A и Y. Оказалось, что $AX^2+BY^2=XY^2$. Докажите, что существует точка, из которой все такие отрезки XY видны под фиксированным углом.

(К.А. Бельский)

Решение.



Равенство из условия означает, что XZY прямоугольный с прямым углом в Z. Тогда легко считается, что угол AZB фиксирован и равен $135°$. Любая точка на этой дуге годится, потому что по ней восстанавливаются X и Y — достаточно провести серединные перпендикуляры к AZ и BZ. Искомая в задаче точка — центр этой дуги, потому что в ней серединные перпендикуляры пересекаются под фиксированным углом $45°$.

Критерии.

(а) Приведена точка, из которой виден под фиксированным углом какой-то отрезок XY, не доказано, что она общая для всех — 0 баллов

(б) Неполный счет — 0 баллов

(в) Полное решение — 7 баллов