



Олимпиада
Юношеской математической школы

2 отборочный тур
5 октября 2024 года
11 класс



1. Числа $a < b$ таковы, что их НОД имеет 39 делителей (включая 1 и себя), а их НОК — 77 делителей. Докажите, что $b = a^2$.
2. На доске написано несколько линейных функций. Андрей заметил, что если взять две любые написанные функции, перемножить их и взять производную результата, то полученная функция тоже окажется написанной на доске. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.
3. У Ани и Бори есть проволоочная окружность, и они её решили поделить. Аня поставила на этой окружности метку в случайно выбранной точке, которую Боря не видит. Боря случайным образом выбирает две точки на окружности (выбор второй точки не зависит от выбора первой) и разрезает окружность в этих двух точках. Аня берёт себе ту часть окружности, в которой находится выбранная ей точка. Найдите вероятность того, что Анин кусок окажется длиннее Бориного.
4. Дан треугольник ABC . Точка I — центр вписанной окружности, E , F , G — точки касания вписанной окружности со сторонами BC , AC и AB соответственно. На отрезке AF отмечена точка K , такая что $KF = FC$, а на продолжении AC за точку C отмечена точка L , такая что $AK = CL$. Прямая KI пересекается с отрезком EG в точке M . Отрезки IL и BC пересекаются в точке N . Докажите, что угол KMN прямой.
5. В социальной сети «ВТомате» зарегистрирован ровно миллион пользователей, некоторые из которых являются друзьями. Оказалось, что если пользователи A и B друзья, и у них d_1 и d_2 друзей соответственно, то $d_1 \cdot d_2 \leq 10000$. Владелец сети Паша Помидуров посмотрел, сколько друзей у каждого пользователя, и сложил все эти числа. Могло ли у него получиться число, большее ста миллионов?