Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
15 сентября 2024 года
7 класс

1. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, …, 8, каждое покрашено в красный цвет. За один шаг Алина может выбрать три различных числа такие, что сумма двух из них равна третьему, и поменять у этих трёх чисел цвет (с красного на синий и наоборот). Алина хочет сделать все числа синими. Помогите Алине осуществить желаемое.

2. В 7 классе учится восемь школьников разного роста. Учитель хочет расставить всех учеников в ряд так, чтобы для каждого ученика было выполнено хотя бы одно из условий:

- справа и слева от этого ученика поровну школьников выше его;
- справа и слева от этого ученика поровну школьников ниже его.

Докажите, что у учителя есть ровно два способа так расставить учеников.

3. Федя выписал на доску 10-значное число-палиндром, в записи которого нет нулей. Серёжа перебрал все способы вычеркнуть 8 цифр из выписанного числа и сложил все 45 полученных двухзначных чисел. Могла ли полученная сумма оказаться простым числом? Напомним, что число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо.

4. Даны натуральные числа $p > 1$ и q. Обязательно ли найдутся различные неотрицательные целые числа a, b, c, d такие, что

$$\left(\frac{p}{q}+a\right)\left(\frac{p}{q}+b\right)=\left(\frac{p}{q}+c\right)\left(\frac{p}{q}+d\right)?$$

5. В каждой клетке квадрата 6×6 разрешается провести ноль, одну или две диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно провести так, чтобы никакие три из них не имели общей точки?