**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**

**Первый отборочный тур**
**15 сентября 2024 года**
**11 класс**

**1.** У Андрея есть две кучки с гирями. В одной кучке неограниченное количество гирь по 1 г, в другой — сто гирь по $\sqrt{n}$ г. Андрей знает, что $n$ — натуральное число, не превосходящее 2024, но не знает, чему оно равно. Всегда ли он сможет при помощи чашечных весов определить, чему равно $n$?

**2.** На доске написаны 10 натуральных чисел $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{10}$. Андрей выписал количество делителей у $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{10}$ и получил десять подряд идущих чисел. Никита выписал количество общих делителей у $a_1$ и $a_2$, у $a_1$ и $a_3$, $\ldots$, у $a_9$ и $a_{10}$ (всего 45 таких пар) и получил 45 различных степеней двоек. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**3.** В футбольном клубе 33 игрока, которые изначально незнакомы. Каждый день тренер разбивает их на три команды по 11 человек. Две команды играют между собой, а третья прохлаждается на скамейке запасных. От скуки те, кто на скамейке, знакомятся между собой (а тем, кто играет — некогда знакомиться). Могут ли все игроки перезнакомиться за 11 дней?

**4.** На кривой $xy = 1$ $(x > 0, y > 0)$ даны две точки $A$ и $B$. Касательные к кривой в точках $A$ и $B$ пересекаются в точке $F$. Пусть $M$ — середина отрезка $AB$, $O$ — начало координат. Докажите, что $\frac{MO \cdot MF}{MA \cdot MB}$ не зависит от точек $A$ и $B$.

**5.** Многочлен $f$ таков, что уравнение $f(f(x)) \cdot f(x) = a$ имеет ровно три решения при любом натуральном $a$ от 1 до 40. Докажите, что степень $f$ не менее 6.