



Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
15 сентября 2024 года
10 класс



1. Андрей, Борис, Виктор и Геннадий собирали ягоды. Оказалось, что Андрей с Борисом вместе набрали треть от того, что собрали Виктор и Геннадий вместе. Борис и Виктор собрали две трети от собранного Андреем и Геннадием вместе. А Андрей с Виктором — $7/13$ от собранного Борисом и Геннадием. Какую долю ягод (от общего количества) собрал Андрей?
2. Пять команд сыграли турнир по квиддичу: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. За проигрыш давали 0 очков, за ничью — 3 очка, за победу — 4 очка, а если победа была блестящей (являлась победа блестящей или обычной, определял лично Дамблдор), то команде присуждалось 6 очков. Четыре команды набрали 19, 13, 13 и 7 очков. Сколько очков набрала пятая команда?
3. У трехчлена $x^2 + px + q$ с натуральными коэффициентами нет корней, но если p и q увеличить на 0,1, то корни появятся. Найдите наименьшее возможное значение p .
4. Дан равносторонний треугольник $\triangle ABC$. Пусть M — середина отрезка BC . Точка D симметрична точке A относительно точки B , а точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую MD . Докажите, что K лежит на вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$.
5. На доске написаны десять натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} . Аня берёт все возможные пары из них и для каждой пары a_i, a_j пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеют числа a_i и a_j — таким образом, у Ани на листочке написано 45 чисел. Боря берёт всевозможные тройки чисел a_i, a_j и a_k и пишет на своём листочке, сколько общих делителей имеет эта тройка — таким образом, Боря записал 120 чисел. Оказалось, что все Борины числа больше 1, а среди Аниных хотя бы 20 являются простыми. Докажите, что хотя бы 20 Бориных чисел также являются простыми.