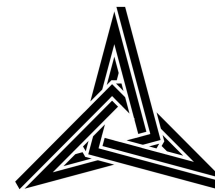


Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 14 декабря 2025 года
11 класс. Основная аудитория



Сюжет 1.

У Маши есть линейка, карандаш, лист с рисунком и бесконечная любовь к геометрии.

1.1. На листе нарисован треугольник ABC и отмечены середины сторон AB и AC — точки M и N , соответственно. Помогите Маше провести прямую через середины отрезков BM и CN .

1.2. На листе нарисованы остроугольный неравносторонний треугольник ABC и его описанная окружность. Отмечены центр этой окружности O и точка пересечения высот треугольника ABC точка H . Постройте точку D на стороне BC такую, что $\angle BDH = \angle CDO$.

Сюжет 2.

Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является k -удивительной для натурального $k \geq 2$, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j f(x_i + x_j) \geq 0.$$

2.1. Приведите пример непостоянной функции, являющейся k -удивительной для любого k .

2.2. Докажите, что никакой непостоянный многочлен не является 2-удивительной функцией.

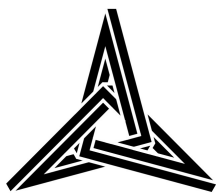
Сюжет 3.

Вася наткнулся на табличку с n строками и m столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до k , причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

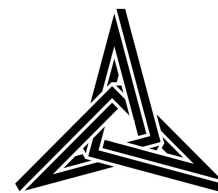
- для любых двух строк найдется ровно a различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно b различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно c различных чисел, встречающихся в обоих.

3.1. Пусть все числа в табличке встречаются одинаковое количество раз. Выразите a , b и c через n , m , k .

3.2. Постройте подходящую табличку для $n = 3$, $m = k = 7$, $a = 7$, $b = 1$, $c = 3$.



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 14 декабря 2025 года
11 класс. Выводная аудитория



Сюжет 1.

У Маши есть линейка, карандаш, лист с рисунком и бесконечная любовь к геометрии.

1.3. На листе нарисованы окружность и её хорда AB . Отмечена середина отрезка AB — точка M . Точки A и B вырезали с листа, то есть через них проводить прямые нельзя. Помогите Маше построить диаметр нарисованной окружности.

1.4. На листе нарисован треугольник ABC , который вписан в нарисованную окружность Ω . Точки E , F отмечены на отрезках AB , AC соответственно. На дуге BAC окружности Ω отмечена такая точка K , что $\angle BKE = \angle CKF$. Помогите Маше отметить середину отрезка EF , проведя не более шести новых прямых.

Сюжет 2.

Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является k -удивительной для натурального $k \geq 2$, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k y_i y_j f(x_i + x_j) \geq 0.$$

2.3. Приведите пример функции, являющейся 2-удивительной, но не 3-удивительной.

2.4. Пусть $f(x), g(x)$ — k -удивительные. Докажите, что $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ — тоже.

Сюжет 3.

Вася наткнулся на табличку с n строками и m столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до k , причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

- для любых двух строк найдется ровно a различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно b различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно c различных чисел, встречающихся в обоих.

3.3. Проведя дополнительное исследование, Вася установил, что

$$a + b + c - 1 = \frac{(m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n + 1)(mn - k)}{k(n - 1)(m - 1)}.$$

Докажите, что все числа в табличке встречаются поровну раз.

3.4. Постройте пример подходящей таблички для $n = 7$, $m = 8$ и $k = 14$.