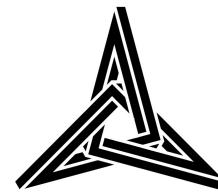


Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 14 декабря 2025 года  
10 класс. Основная аудитория



**Сюжет 1.**

Дан остроугольный неравносторонний треугольник  $ABC$  и на его биссектрисах  $BE$  и  $CF$ , которые пересекаются в точке  $I$ , выбрали такие точки  $B_1$  и  $C_1$ , соответственно, что  $\angle BAB_1 = \angle CAC_1 = 90^\circ$ .

**1.1.** Оказалось, что  $\angle A = 60^\circ$ . Докажите, что прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников  $ABC_1$  и  $ACB_1$ , проходит через  $I$ .

**1.2.** Докажите, что  $B_1C_1 \geq AB + AC - BC$ .

**Сюжет 2.**

Пусть  $S$  —  $n$ -элементное множество вещественных чисел, отличных от  $0, \pm 1$ . Известно, что если для некоторых двух вещественных чисел  $x, y$  выполнено

$$xy + 1 = x - y,$$

и одно из них лежит в  $S$ , то и второе лежит в  $S$ .

**2.1.** Найдите все возможные значения  $n$ .

**2.2.** Вася утверждает, что он может написать в явном виде непостоянную функцию  $f(x)$ , являющуюся отношением многочленов, которая принимает на любом множестве  $S$  размера ровно 772 не более трех сотен значений. Прав ли он?

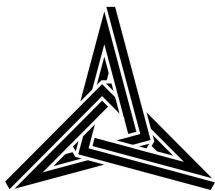
**Сюжет 3.**

Вася наткнулся на табличку с  $n$  строками и  $m$  столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до  $k$ , причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

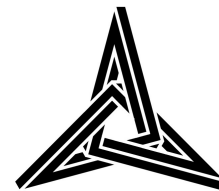
- для любых двух строк найдется ровно  $a$  различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно  $b$  различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно  $c$  различных чисел, встречающихся в обоих.

**3.1.** Пусть все числа в табличке встречаются одинаковое количество раз. Выразите  $a, b$  и  $c$  через  $n, m, k$ .

**3.2.** Постройте подходящую табличку для  $n = 3, m = k = 7, a = 7, b = 1, c = 3$ .



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 14 декабря 2025 года  
10 класс. Выводная аудитория



**Сюжет 1.**

Дан остроугольный неравносторонний треугольник  $ABC$  и на его биссектрисах  $BE$  и  $CF$ , которые пересекаются в точке  $I$ , выбрали такие точки  $B_1$  и  $C_1$ , соответственно, что  $\angle BAB_1 = \angle CAC_1 = 90^\circ$ .

**1.3.** Описанные окружности треугольников  $AB_1F$  и  $AC_1E$  повторно пересекаются в точке  $S$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $AIS$  проходит через основание перпендикуляра из  $I$  на  $BC$ .

**1.4.** Точка  $X$  выбрана на отрезке  $B_1C_1$  так, что  $AX \perp BC$ . Докажите, что вневписанные окружности треугольников  $AXB_1$  и  $AXC_1$ , касающиеся отрезка  $AX$ , имеют равные радиусы.

**Сюжет 2.**

Теперь  $S$  —  $n$ -элементное множество вещественных чисел,  $a \in \mathbb{R}$ . Известно, что если для некоторых двух вещественных чисел  $x, y$  выполнено

$$xy + 1 = a(x - y)$$

и одно из них лежит в  $S$ , то и второе лежит в  $S$ .

**2.3.** Для каких  $a$  найдется множество  $S$  размера 997?

**2.4.** Целое число  $a$  и простое число  $p > 3$  таковы, что число  $(a^3 - 3a)^2 - 3(1 - 3a^2)^2$  делится на  $p$ . Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 9.

**Сюжет 3.**

Вася наткнулся на табличку с  $n$  строками и  $m$  столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до  $k$ , причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

- для любых двух строк найдется ровно  $a$  различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно  $b$  различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно  $c$  различных чисел, встречающихся в обоих.

**3.3.** Проведя дополнительное исследование, Вася установил, что

$$a + b + c - 1 = \frac{(m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n + 1)(mn - k)}{k(n - 1)(m - 1)}.$$

Докажите, что все числа в табличке встречаются поровну раз.

**3.4.** Постройте пример подходящей таблички для  $n = 7$ ,  $m = 8$  и  $k = 14$ .