



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 17 декабря 2017 года  
10 класс. Основная аудитория

**Сюжет 1**

Во всех пунктах под  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

**1.1.** Пусть  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $g(x) = -x^2 + x + 1$ . Найдите такой непостоянный многочлен  $h$ , что  $h(f(x)) = h(g(x))$ .

**1.2.** Докажите, что не существует квадратных трёхчленов  $f$  и  $g$ , таких что  $f(g(x)) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ .

**Сюжет 2**

Окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$  вписана в треугольник  $ABC$  и касается его сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Биссектрисы треугольника  $ADE$  пересекаются в точке  $J$ . Отрезки  $BJ$  и  $CJ$  пересекают отрезок  $DE$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.

**2.1.** Докажите, что  $PJ > PD$ .

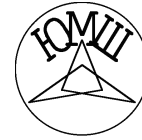
**2.2.** Известно, что  $IJ = DE$ . Найдите угол  $BAC$ .

**Сюжет 3**

Есть две полоски длиной  $k$ . В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит  $n$  фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору. Первым ходит Паша.

**3.1.** Пусть  $k = 4$ ,  $n = 3$ . Всегда ли Паша может добиться того, чтобы одна из фишек дошла до последней клетки?

**3.2.** Пусть  $k = 4$ ,  $n = 100$  и Паша каждым ходом сдвигает фишки в полоске только из каких-то двух клеток (по одной в каждой полоске). Докажите, что Рома может добиться того, что не более 50 фишек (с учетом снятых) попадут в последние клетки своих полосок.



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 17 декабря 2017 года  
10 класс. Выводная аудитория

**Сюжет 1**

Во всех пунктах под  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

**1.3.** Пусть  $h$  — непостоянный многочлен,  $f \neq g$ , и пусть  $h(f(x)) = h(g(x))$ . Докажите, что  $f + g$  — постоянный многочлен.

**1.4.** Пусть непостоянные различные многочлены  $f$  и  $g$  с положительными старшими коэффициентами таковы, что

$$\begin{aligned} f(f(x)g(x)) + f(g(x)) \cdot g(f(x)) + f(f(x)) \cdot g(g(x)) = \\ = g(f(x)g(x)) + f(f(x)) \cdot f(g(x)) + g(f(x)) \cdot g(g(x)). \end{aligned}$$

Докажите, что  $f$  и  $g$  отличаются только одним коэффициентом.

**Сюжет 2**

Окружность  $\omega$  с центром в точке  $I$  вписана в треугольник  $ABC$  и касается его сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Биссектрисы треугольника  $ADE$  пересекаются в точке  $J$ . Отрезки  $BJ$  и  $CJ$  пересекают отрезок  $DE$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.

**2.3.** Докажите, что периметр треугольника  $BJS$  больше периметра четырехугольника  $BDEC$ .

**2.4.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины  $DJ$  и  $JE$ . Докажите, что  $PM = QN$ .

**Сюжет 3**

Есть две полоски длиной  $k$ . В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит  $n$  фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

**3.3.** Пусть  $n < 2^{k-3}$ . Докажите, что Рома может сделать так, что ни одна из фишек не дойдёт до конца.

**3.4.** Пусть  $n > k \cdot 2^k$ . Докажите, что Паша может сделать так, что хотя бы одна из фишек дойдёт до конца.