Решения и критерии оценки 1 тура олимпиады ЮМШ

Содержание

4 класс

1. В строчку выписаны подряд все числа от 1 до 10:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10.$$

Поставьте в этой строчке знаки арифметических действий $+, -$ и $\times$ так, чтобы результат выполнения этих действий оказался равным 533. Скобки не допускаются.

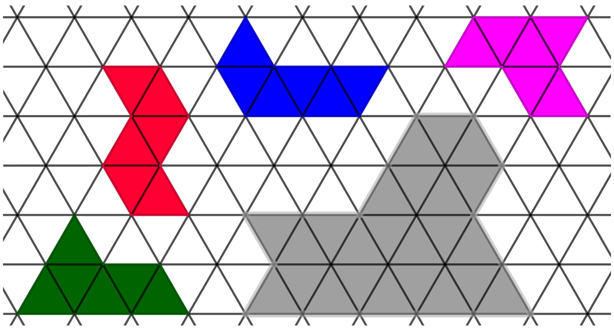
Решение:

Есть очень много различных вариантов. Если использовать объединение нескольких цифр в многозначные числа, то, например, годится вариант $533 = 123 \times 4 - 56 + 78 + 9 + 10$. Однако можно и не группировать цифры: $533 = 1 \times 2 + 3 + 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 \times 9 - 10$. Идея решения — подыскать такое произведение трех подряд идущих чисел, чтобы оно было поближе к 533, а остальное уже дополнять сложениями и вычитаниями. □

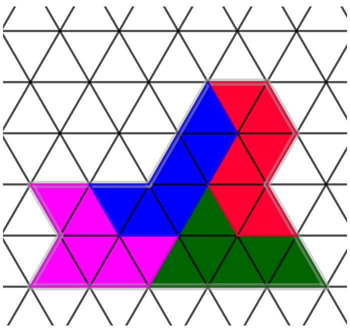
Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Любое неверное решение или верное, но использующее скобки — 0 баллов.

2. Покажите, как наклеить четыре маленьких фигурки на большую фигурку, чтобы они закрыли её полностью:



Решение:



□

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Отсутствие линий сетки в примере — минус балл.

3. В кучке было 1000 камешков. Первым ходом Саша добавил туда один камешек, а Петя забрал три камешка, потом Саша добавил пять камешков, а Петя забрал 7 камешков, и так далее.

Сколько камешков оказалось в кучке, когда Саша сделал свой 100-й ход, а Петя ещё не успел ответить?

Решение:

После того как Саша добавил первый камешек, в кучке оказался 1001 камешек. Каждый из следующих ходов Саши увеличивал количество камешков на 2, поэтому всего в кучке окажется $1001 + 2 \cdot 99 = 1199$ камешков. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Наличие арифметических ошибок, которые приводят к неверному ответу — не более 2 баллов.

4. В баре находится 30 человек. Бармену известно, что среди них 10 рыцарей (они всегда говорят правду), 10 лжецов (они всегда лгут) и 10 дебоширов. Бармен может спросить человека X про человека Y: «Правда ли, что Y дебошир?». Если X не дебошир, то он отвечает на вопрос, а если дебошир, то он вышвырнет из бара Y в ответ. Бармену интересно узнать про посетителей, кто есть кто. Как ему это выяснить?

Решение:

Поскольку вышвырнутых уже невозможно о ком-либо спросить, то бармену следует спрашивать только про тех, о ком он и так уже знает. Действительно, если он спрашивает про известного ему человека, не дебошир ли он, и получает ответ, то по истинности ответа он может узнать, кто отвечавший — рыцарь или лжец. А если вместо ответа этого человека вышвыривают из бара, то бармен узнает, что X — дебошир. Но как быть с самым первым вопросом?

Пусть бармен начинает задавать свои вопросы разным посетителям бара, но спрашивает про одного и того же посетителя Y (до тех пор, пока его не вышвырнут). В тот момент, когда какой-то посетитель X вышвырнул Y из бара, бармен уже знает, что X дебошир — и заново опрашивает всех уже опрошенных им посетителей про X. Поскольку дебоширов среди них нет, то бармен по полученным ответам поймет, кто из них рыцарь, а кто лжец. После этого достаточно будет опросить любого из не-дебоширов про всех посетителей бара.

Однако как быть, если в ответ на первый же вопрос бармена посетитель X вышвырнет Y из бара? Тогда ему нужно опрашивать всех про X до тех пор, пока он не встретит хотя бы одного не-дебошира и получит ответ на вопрос. После этого он сможет узнать про всех посетителей бара (включая вышвырнутых дебоширов), кроме самого первого посетителя Y, Но поскольку он знает, что в баре было ровно 10 человек каждого вида, то определить, кем был Y, он сможет методом исключения — потому что остальных видов будет по 10, а какого-то одного вида наберется всего 9. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Упущен случай, когда приходится определять первого методом исключения — не более 4 баллов.
- Нет общего алгоритма — не более 2 баллов.

5. Трёхцветный флаг состоит из трёх горизонтальных полос, каждая из которых может быть белой, синей, красной, жёлтой, зелёной или чёрной, причём две соседних полосы не должны иметь одинаковый цвет. Сколько существует таких флагов, у которых верхняя полоса — не белая, средняя — не синяя, а нижняя — не красная? (Не забудьте объяснить свой ответ.)

Решение:

Если средняя полоса флага желтая, зелёная или черная, то на каждой из крайних полос могут быть любые из 4 цветов (все, кроме «запретного» и того цвета, который есть у средней полосы) — и это даёт $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ вариантов. Если средняя полоса белая, то для нижней полосы по-прежнему 4 варианта, а для верхней — 5, итого 20. Аналогично, если средняя полоса красная, то для верхней полосы 4 варианта, а для нижней — 5. Всего получается $48 + 20 + 20 = 88$ вариантов. $\square$

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Только верный ответ без объяснения способа подсчета — 3 балла.

6. Аистёнок, баклан, воробей и голубь решили взвеситься. Вес каждого из них оказался целым числом попугаев, причём общий вес всех четверых — 32 попугая. При этом

— воробей легче голубя;
— воробей с голубем легче баклана;
— аистёнок легче воробья с бакланом;
— голубь с бакланом легче, чем аистёнок с воробьём.

Кто сколько попугаев весит? (Найдите все возможные варианты и объясните, почему других вариантов быть не может.)

Решение:

Будем обозначать веса птичек буквами А, Б, В, Г соответственно.

Так как $\text{Г} + \text{Б} < \text{А} + \text{В}$, то $\text{Г} + \text{Б}$ — не более 15 попугаев, а $\text{А} + \text{В}$ — не менее 17 попугаев.

Если бы воробей мог весить хотя бы 5 попугаев, то голубь должен был бы весить не менее 6, а значит, баклан должен был бы весить не менее 12 (так как он тяжелее, чем воробей с голубем), но тогда вместе с голубем у него получается уже 18, что невозможно. Следовательно, воробей весит не более 4 попугаев.

Если бы аистёнок весил 14 попугаев, то воробей с бакланом вместе должны были бы весить не менее 15, но тогда оставшийся голубь — не более $32 - 14 - 15 = 3$, а воробей — еще меньше, то есть не более 2, и в сумме $\text{А} + \text{В}$ получается не более 16. Если аистёнок весил бы 15 попугаев, то всё еще хуже: воробей с бакланом не менее 16, голубь не более 1, а тогда воробей не может быть легче голубя. Таким образом, аистёнок не может весить больше 13 попугаев.

Мы получили, что А не более 13, В не более 4, а $\text{А} + \text{В}$ не меньше 17. Это возможно только если $\text{А} = 13$ и $\text{В} = 4$. Так как $\text{В} < \text{Г}$, то Г не менее 5, а так как $\text{А} < \text{В} + \text{Б}$, то Б не менее 10. Но так как $\text{Г}+\text{Б}$ не более 15, то $\text{Г} = 5$, а $\text{Б} = 10$. Это и есть единственно возможный вариант. $\square$

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Верный ответ — 3 балла.
- Обоснование единственности — 4 балла.

5 класс

1. У Маши есть карточки с числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одну из них она потеряла, а остальные выложила в виде квадратика 3×3. Маша заметила, что сумма чисел в первой строчке квадрата делится на сумму чисел во второй строчке (и эти суммы не равны), а сумма чисел во второй строчке делится на сумму чисел в третьей (и эти суммы не равны). Нарисуйте, как могли располагаться числа в квадрате.

Решение:
Один из способов показан на рисунке (Маша потеряла карточку с цифрой 6).

7	8	9
3	4	5
0	1	2

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 4 балла.

2. Вася сложил три различных двузначных слагаемых и понял, что сумма больше третьего слагаемого на 22, а первого — на 24. Найдите эту сумму.

Решение:
Пусть x, y, z — искомые числа. Из условий видим, что $x + y = 22$, $y + z = 24$. Так как числа различны и двузначны, то $x = 10, y = 12$ или наоборот (других вариантов получить в сумме 22 нет). Тогда $z = 12$ (если $y = 12$) или $z = 14$ (при $y = 10$). Первый вариант не подходит, т.к. числа не являются различными. Итак, $z = 14$ и $x + y + z = 36$. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Верный ответ — 1 балл.
- Написанные уравнения и правильный ответ (т. е. не осуществлён перебор) — не более 3 баллов.
- За отсутствие разбора случая $x = 11$ баллы не снижаются.

3. На клетчатой плоскости кузнечик отправился в путешествие из своего дома. Он прыгнул на одну клетку, потом на две, повернулся направо, прыгнул на три, затем на четыре клетки, снова повернулся направо и т. д. (после каждых двух прыжков — один поворот направо, каждый следующий прыжок длиннее предыдущего на одну клетку). После тысячного прыжка он ещё раз повернулся (направо или налево), прыгнул, снова повернулся, снова прыгнул и оказался в первоначальной клетке. На сколько клеток он прыгал два последних раза?

Решение:
Посмотрим, что происходит после восьми подряд идущих прыжков. Пусть для определённости первые два прыжка (на x и $x + 1$ клетку) кузнечик сделал влево. Тогда прыжки $x + 2$ и $x + 3$ он совершил вверх, $x + 4$ и $x + 5$ — вправо, и $x + 6$ и $x + 7$ — вниз. Итог этих восьми прыжков — кузнечик сдвинулся на 8 клеток вправо и на 8 вниз, а следующий ход будет снова влево. Таких восьмёрок у кузнечика будет 125; следовательно, ему нужно будет ещё прыгнуть на 1000 влево и на 1000 вниз, чтобы попасть в исходную точку. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Только ответ — 1 балл.

- Нарисованная спиралька с шагом 8 клеток — 1 балл.
- Не доказано, почему любой виток добавляет к сумме по 8 клеток — не более 3 баллов.

4. При игре в «нью-напёрстки» под три стаканчика кладут три разных шарика, а потом стаканчики с шариками как-то меняют местами, чтобы ни один шарик не остался на своём месте. Изначально шарики лежали так: красный, синий, белый. Могут ли они после сотого раунда лежать в обратном порядке?

Решение:

При такой игре вообще возможны только три комбинации: «красный, синий, белый», «синий, белый, красный» и «белый, красный, синий». Любая перестановка, разрешённая по условию задачи, приводит к одной из этих комбинаций. Следовательно, перестановку «белый, синий, красный» получить нельзя ни после сотого раунда, ни после какого-либо ещё. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Явно написано, что могут получиться только три комбинации, но не показано, почему — 3 балла.
- То же, но комбинации указаны неявно, но верно — 1 балл.

5. Андрюша написал равенство, а затем заменил в нём цифры буквами: одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось ЗУХРА $\times$ ХАРОН $=$ АНАХРОНИЗМ. Он утверждает, что любая цифра, записанная гласной, больше любой цифры, записанной согласной. Мог ли Андрюша нигде не ошибиться?

Решение:

Не мог. Допустим, что ребус удовлетворяет всем условиям. Всего у нас задействованы согласные буквы З, Х, Р, Н, М и гласные буквы У, А, О, И. Следовательно, З < 6 и Х < 6. Значит, ЗУХРА < 60000 и ХАРОН < 60000, а тогда ЗУХРА $\times$ ХАРОН < 3600000000, откуда $A < 4$. Но такого не могло быть, если каждая гласная больше каждой согласной.

Примечание. Компьютерный перебор показывает, что этот ребус вообще не имеет решений. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Неполное объяснение, почему переносы не влияют на первую цифру (где это требуется по решению) — не более 3 баллов.
- Неверная оценка (например, ХАРОН заменяется на 50000 вместо 59999) — не более 2 баллов.

6. В баре находится 30 человек. Бармену известно, что среди них 10 рыцарей (они всегда говорят правду), 10 лжецов (они всегда лгут) и 10 дебоширов. Бармен может спросить человека X про человека Y: «Правда ли, что Y дебошир?». Если X не дебошир, то он отвечает на вопрос, а если дебошир, то он вышвырнет из бара Y в ответ. Бармен сам может выгнать из бара кого угодно, но его цель — избавиться от дебоширов и оставить в баре как можно больше мирных клиентов. Как ему следует поступать? Не забудьте доказать, что большее количество мирных клиентов он оставить не сможет.

Решение:

Ответ: 19. В самом деле, с первым же вопросом может быть выставлен мирный клиент, поэтому бармен не сможет гарантированно сохранить всех мирных.

Покажем, как бармену оставить 19 мирных клиентов.

Решение 1. Сначала он спрашивает всех про клиента A — до тех пор, пока кто-нибудь его не вышвырнет из бара. Пусть его вышвырнул B (следовательно, он дебошир). Теперь начинаем спрашивать про B, пока B не окажется вышвырнутым, и т. д. В конце мы получим ситуацию, когда дебошира X никто не вышвыривает. Значит, дебоширов больше нет (кроме X). Бармен выгоняет X, и всем становится спокойно. Заметим, что все выгнанные, кроме самого первого, гарантированно являлись дебоширами.

Решение 2. Сначала спрашиваем клиента B про A, затем спрашиваем C про B. За первый вопрос мы получаем информацию, дебошир ли B, за второй узнаём, кем является C — рыцарем, лжецом или дебоширом. Если C не дебошир, то опросим C про всех клиентов и узнаем, кто дебоширы (если C лжец, то его ответы надо трактовать наоборот). Их и надо выгнать.

Если C сам дебошир, то спросим D про C. Либо D ответит, либо и он дебошир (тогда будем спрашивать про D, и т. д.) Когда получим какой-нибудь ответ, действуем, как в предыдущем случае. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Алгоритмы, приводящие к большему количеству выгнанных, не оцениваются.
- Отсутствие оценки при правильном алгоритме — не более 5 баллов.
- Верно сделанная оценка — 1 балл.

7. В квадрате 100×100 провели 10 000 разрезов по линиям сетки (каждый разрез длиной в одну клетку), и он распался на 2500 четырёхклеточных фигурок. Сколько среди них квадратиков 2×2?

Решение:

Ответ: 2300.

Решение. Заметим, что у квадрата 2×2 периметр равен 8, а у остальных четырёхклеточных фигур (прямоугольник 1×4, Т-шка, L-ка или S-ка) — 10. Пусть квадратиков x, остальных фигур $2500 - x$. Тогда их суммарный периметр равен $8x + 10 \cdot (2500 - x) = 25\,000 - 2x$. С другой стороны это периметр квадрата плюс удвоенная длина разреза, т. е. 20 400 клеток. Отсюда $2x = 25\,000 - 2\,0400 = 4600$, и в результате $x = 2300$. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Только верный ответ (например, полученный примером конкретного разрезания) — 1 балл

6 класс

1. У Максима было число 4. Вот как-то раз он то ли прибавил к нему 1, то ли умножил на 1, затем к результату то ли прибавил 2, то ли умножил на 2, затем то ли прибавил 3, то ли умножил на 3, и т. д. Десятым действием он то ли прибавил 10, то ли умножил на 10 и получил 1000. Как такое могло произойти?

Решение:
Способ 1.
$4 + 1 = 5, +2 = 7, +3 = 10, +4 = 14, \times 5 = 70, +6 = 76, +7 = 83, +8 = 91, +9 = 100, \times 10 = 1000$
Способ 2.
$4 + 1 = 5, +2 = 7, \times 3 = 21, \times 4 = 84, +5 = 89, +6 = 95, +7 = 102, +8 = 110, \times 9 = 990, +10 = 1000$

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 4 балла.
- Есть осмысленная попытка пойти с конца, но пример не построен из-за арифметической ошибки или неутченного варианта — 1 балл.
- Остальное — 0 баллов.

Замечание. В этой задаче требуется только пример, его наличие необходимо и достаточно для получения полного балла.

2. По кругу стоят десять стаканов с водой и берёзовым соком, внешне неразличимые (однако различающиеся на вкус). Известно, что берёзовый сок — в каких-то пяти стаканах подряд. Можно ли, пробуя жидкость из разных стаканов, гарантированно отыскать три нетронутых стакана с соком?

Решение:
Способ 1. Пьём два стакана напротив. Заметим, что в этих стаканах разные напитки (т.к. в пяти подряд стаканах сок, то напротив в пяти стаканах будет вода). Дальше пьем стаканы за водой подряд, пока не наткнёмся на сок, определив границы сока и попортив максимум два стакана с соком.

Способ 2. Пьём всё подряд, пока не наткнёмся на сок. Пропускаем три стакана за этим, по часовой стрелке, и пьём опять. Дальше пятимся к початому стакану сока, пока не наткнёмся на сок опять, определив границы сока и попортив максимум два стакана с соком.

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- *Замечание.* Если найдена граница, то дополнительных объяснений, почему мы определили стаканы с соком, не требуется.
- В правильном решении не объяснено, что мы идем до границы — −1 балл.
- В решении со стаканами напротив не объяснено, почему там разные напитки — −1 балл.
- Незначительные продвижения (решения, работающие иногда) — 1–2 балла.
- Никак не учитывается, что нужно найти три **нетронутых** стакана и просто определяется, что где (с порчей более двух стаканов почти всегда) — 0 баллов.

3. На автобусном маршруте всего четыре остановки — «Начальная», «Первая», «Финальная» и «Конечная». На первых двух остановках пассажиры только заходили, на остальных — только выходили. Оказалось, что на «Начальной» зашло 30 пассажиров, на «Конечной» вышло 14 пассажиров. На «Первой» зашло втрое меньше пассажиров, чем вышло на «Финальной». Каких пассажиров больше — едущих с «Начальной» на «Конечную», или едущих с «Первой» на «Финальную», и на сколько?

Решение:

Ответ: едущих с «Первой» на «Финальную» больше на шесть.

Обозначим за x количество зашедших на «Первой». Тогда на «Финальной» вышло $3x$. Поскольку количество зашедших равно количеству вышедших, получаем $30+x = 3x+14$, откуда $x = 8$. Обозначим за y едущих с «Начальной» на «Конечную». Тогда едущих с «Начальной» на «Финальную» $8 - y$. Они составляют вместе с едущими с «Первой» на «Финальную» 14 человек. Значит, едущих с «Первой» на «Финальную» $14 - 8 + y = 6 + y$. Т.е. на шесть человек больше, чем едущих с «Начальной» на «Конечную».

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Первая часть (нахождение зашедших на «Первой»/вышедших на «Финальной») с объяснениями — 2 балла.
- Первая часть без достаточных объяснений (например, есть уравнение, но не объяснено, откуда оно взялось) — 1 балл.
- Вторая часть (нахождение разности едущих с «Первой» на «Финальную» и с «Начальной» на «Конечную») с объяснениями — 3 балла.
- Вторая часть без достаточных объяснений (например, есть уравнение, но не объяснено, откуда оно взялось) — 1 балл.
- Одна-две арифметических ошибки (или число, отличное от того, что в условии) — -1 балл.
- Только правильный ответ — 1 балл.

4. Барон Мюнхгаузен поставил по коню в некоторые клетки доски $N \times N$. Он утверждает, что никто не найдёт два разных квадрата 4×4 на этой доске (со сторонами, идущими по линиям сетки), в которых коней поровну. При каком наибольшем N его слова могут быть правдой?

Решение:

Ответ: $N = 7$.

Коней в квадрате 4×4 может быть от 0 до 16, т. е. всего 17 вариантов. Количество квадратов 4×4 на доске $N\times N$ равно $(N-3)^2$ (поскольку верхняя левая клетка квадрата может занимать по горизонтали от крайней левой позиции до четвертой справа, то же по вертикали). Чтобы не было повторений, количество квадратов должно быть не больше 17, т.е. $(N-3)^2 \leqslant 17$. Значит, N не может быть больше семи, т.к. тогда $(N-3)^2 \geqslant (8-3)^2 = 25 > 17$.

При $N = 7$ можно построить пример, показанный справа (кони расставлены в закрашенных клетках; в левой верхней клетке каждого квадрата указано количество коней в этом квадрате).

16	15	14	13			
12	11	10	9			
8	7	6	5			
4	3	2	1			

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 9 баллов.
- Только ответ — 1 балл.
- Пример (с ответом) — 4 балла.

- Оценка — 4 балла, складывается из следующих баллов:
  - Доказано, что квадратов 4×4 на доске не больше 17 — 1 балл.
  - Замечание, что на доске 7×7 помещается 16 квадратов — 1 балл, с доказательством — 2 балла.
  - Доказано, что на больших досках больше 17 квадратов — 1 балл.
- Если в правильном решении считается, что вариантов количества коней только 16 — -1 балл.
- Пример на 6 — 1 балл. На меньше — 0 баллов.
- Оценка на 8 — 1 балл. Хуже — 0 баллов.

5. Можно ли разбить числа от 1 до 80 на четвёрки так, чтобы в каждой четвёрке наибольшее число равнялось сумме трёх остальных?

Решение:
Ответ: нет, нельзя.

Способ 1. Предположим, что такое возможно. Заметим, что групп всего 20. Посмотрим на сумму наибольших чисел всех групп. Она не больше суммы 20 наибольших чисел, т.е. $61+62+\ldots+79+80 = (61+80)+(62+79)+\ldots+(70+71) = 141 \cdot 10 = 1410$. Это меньше суммы остальных 60 чисел, так как эта сумма не меньше $1+2+\ldots+60 = 61 \cdot 30 = 1830$. Но поскольку в каждой группе наибольшее равняется сумме остальных, то и суммы по всем группам должны быть равны. Противоречие.

Способ 2. Предположим, что такое возможно. Заметим, что групп всего 20. Поскольку в каждой группе наибольшее число равняется сумме остальных, то сумма наибольших чисел в группах равна половине суммы всех чисел. Сумма всех чисел равна $1+2+\ldots+80 = 81 \cdot 40 = 3240$, значит сумма наибольших должна равняться 1620. Но этого не может быть, т.к. каждое число не больше 80, т.е. эта сумма не больше $80 \cdot 20 = 1600$. Противоречие.

$\square$

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Идея сложить 20 наибольших и 60 наименьших — 3 балла,
- Если суммы получились правильные, но акцент делается на «не равно», а не «меньше» — $3+1=4$ балла,
- Если суммы получились правильные, акцент делается именно на «меньше», но нет слов о том, что если возьмем другие, будет еще меньше — $3+1+1=5$ баллов.
- Только ответ — 0 баллов.

6. У Пафосного Вовы есть Айфон XXX, а на Айфоне том — калькулятор с голосовыми командами: «Умножь число моё на два и двойку отними от результата», «Изволь на три моё число домножить, да потом ещё прибавь четыре» и, наконец, «Прибавь-ка семь к числишку моему!» Айфон в курсе, что изначально у Вовы было числишко 1. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые теоретически Айфон XXX мог бы получить, покорно выполняя Вовины команды?

Решение:
Ответ: 9000 (или 18000, если учитывать отрицательные).

Докажем, что можно получить вообще все четырёхзначные числа. Заметим, что команда $+7$ дает возможность получить из текущего числа все большие числа с таким же остатком от деления на семь. Тогда достаточно с помощью первых двух кнопок получить по представителю каждого из семи остатков $(0, 1, \ldots, 6)$.

Изначально у нас есть 1. Из 1 можно получить число 7 ($3 \cdot 1 + 4 = 7$) – представителя остатка 0. Из числа 7 можно получить представителей остатка 5 ($2 \cdot 7 - 2 = 12$) и остатка 4 ($3 \cdot 7 + 4 = 25$). Из числа 25 получается представитель остатка 6 ($2 \cdot 25 - 2 = 48$) и остатка 2 ($3 \cdot 25 + 4 = 79$). Из числа 79 можно получить представителя остатка 3 ($3 \cdot 79 + 4 = 241$). Таким образом, мы получили представителей всех остатков, из которых сможем получить все четырёхзначные числа с помощью кнопки +7. А четырехзначных чисел всего 9000. $\square$

Замечание. В задаче подразумевались натуральные четырёхзначные числа. Впрочем, для отрицательных работает аналогичное решение, только сначала нужно получить с помощью многократного повторения операции $2 \cdot x - 2$ многозначное отрицательное число с остатком 1 от деления на 7 (при данной операции остатки чередуются 1 – 0 – 5 – 1).

Критерии оценки:

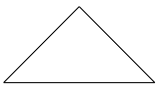
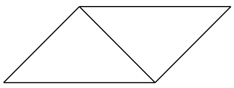
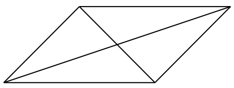
- Полное решение — 7 баллов.
- Показывается, как получить достаточно большую группу подряд идущих чисел (например, с 10 до 30), далее говорится, что можно все (без обоснования) — 3 балла.
- Замечание, что с помощью команды +7 можно получить все большие с таким же остатком — 3 балла.
- Только пример получения нескольких чисел — 0 баллов.
- Решение, работающее для натуральных чисел (может содержать ошибки для отрицательных или вообще их не учитывать) оценивается в полный балл.

7. В отряде сто человек, у каждого по три друга в отряде. На дежурство требуется назначать по три человека, среди которых каждый дружит с каждым. 99 дней подряд удавалось назначать тройки дежурных, не повторяя их. Докажите, что это удастся и на сотый день.

Решение:

Способ 1. Предположим, что не удастся, т.е. все возможные тройки подежурили. Рассмотрим какую-нибудь дежурную тройку A, B, C. Предположим, что кто-то из них дежурил еще с кем-то не из этой тройки (обозначим за A и D). Поскольку у каждого в отряде всего по три друга, то у A нет друзей, кроме B, C, D. Тогда в дежурстве A и D третьим мог быть только B или C. Не умаляя общности, считаем, что это B. У B друзья A, C, D. У C третьим другом может быть либо D, либо какой-то человек из остального отряда (обозначим за E). В первом случае A, B, C, D дружат между собой и образуют четыре дежурных пересекающихся тройки. Во втором случае C и E не могли дежурить вместе, т.к. E не входит в число друзей A, B, т.е. с другими дежурствами две рассматриваемые дежурные тройки не пересекаются.

Получается, что с точки зрения пересечений дежурств, все дежурные тройки разбиваются на группы трех видов:

I  II  III 

В группу каждого вида людей входит не меньше, чем дежурств, причем в группе первого вида людей больше на два. Так как дежурств всего 99 — нечетное количество, то хотя бы одна группа первого вида присутствует. Но тогда людей больше хотя бы на два, чем групп, т.е хотя бы 101 — противоречие.

Способ 2. Заметим, что каждый человек может участвовать в дежурстве максимум три раза. Этот максимум достигается, только если все его три друга дружат между собой. Более того, в такой ситуации все его друзья тоже могут подежурить по три раза (т.к. дружат с ним и между собой). Посчитаем общее количество выходов на дежурства. Оно должно быть не меньше 99 дежурств $\times 3$ человека $= 297$ и не больше 100 людей $\times 3$ дежурства $= 300$. Если есть хотя бы один человек, у которого меньше трех выходов, то у его друзей тоже, значит общее количество выходов не больше $300 - 1 - 3 = 296$. Противоречие. Если такого человека нет, то у каждого друзья дружат между собой, значит все люди разбиваются на четверки, этих четверок $100/4 = 25$, каждая дает по 4 дежурства, и всего их 100.

$\square$

Критерии оценки:

- Полное решение — 9 баллов.
- Рассуждение вида: «группы друзей могут быть только по 4 человека (без обоснования), 25 групп, в каждой группе по 4 дежурства, всего 100 дежурств» — 1 балл.

7 класс

1. Вася выписал 20 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Докажите, что найдутся два числа, стоящих рядом, у которых совпадает хотя бы одна цифра.

Решение:

Среди 20 последовательных чисел найдутся 10 из одного десятка, причем ясно, что они не однозначные; у них совпадает цифра разряда десятков — обозначим ее через N.

Кроме того, каждая цифра, в частности N, ровно два раза встречается среди последних цифр 20 подряд идущих чисел; из них — только один раз в обозначенном нами десятке.

Таким образом, у нас есть одиннадцать чисел с цифрой N. Тогда если разбить 20 выписанных Васей чисел на 10 пар рядом стоящих, найдется пара, в которой оба числа содержат N. □

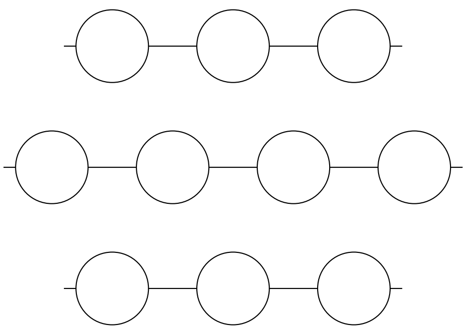
Критерии оценки:

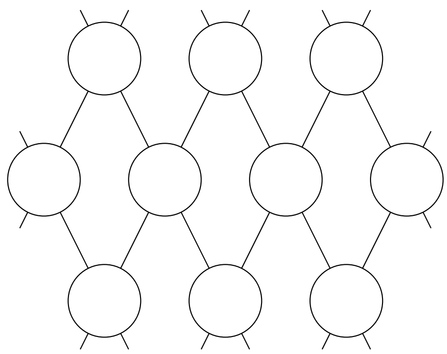
- Полное решение — 3 балла.
- В конкретном примере найдено 11 чисел с одинаковой цифрой, где у десяти чисел эта цифра в разряде десятков, а у оставшегося — в разряде единиц — не более 2 баллов.
- В конкретном примере найдено 11 чисел с одинаковой цифрой, и такой выбор не обобщается на произвольный случай — 0 баллов.

2. В каждый кружочек записали число. Оказалось, что суммы чисел вдоль каждой прямой равны. Чему равна сумма чисел в табличке?

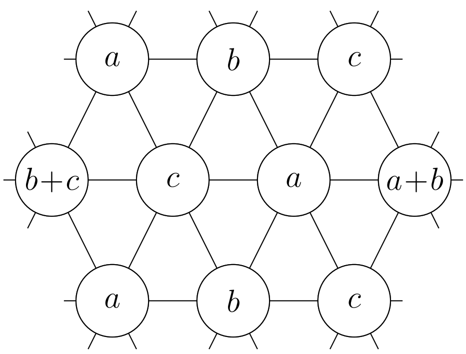
Решение:

Пусть сумма чисел в одном ряду равна S. Тогда с одной стороны, сумма всех чисел в таблице равна $3S$, а с другой стороны равна $4S$. Значит, $S = 0$.





Можно еще было, приравнивая суммы в пересекающихся рядах, посчитать значения чисел.

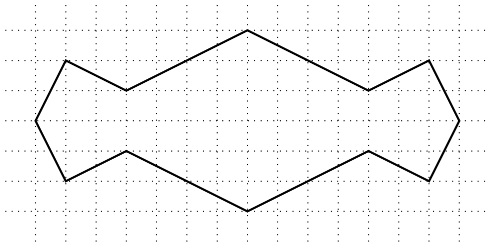


Обратите внимание, числа **не обязаны быть равными 0**. □

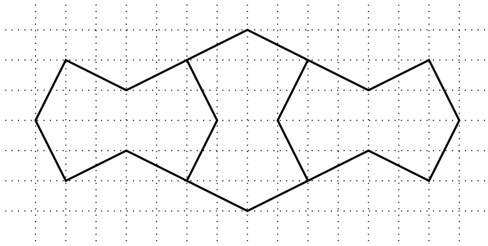
Критерии оценки:

- Полное решение — 3 балла.
- Правильный ответ, **не** основывающийся на утверждении, что все числа равны 0, — 1 балл.

3. Разрежьте конфету на 3 равные части.



Решение:



□

Критерии оценки:

- Полное решение — 3 балла.
- Разрезание на равные по площади части, не совпадающие при наложении, — 0 баллов.
- Подсчет площади каждой из частей — 0 баллов.

4. На бумажке было написано огромное число. Максим порвал бумажку на клочки. На каждом клочке оказалось число от 1 до 100 500, причем каждое число встретилось по разу. Максим утверждает, что на бумажке была написана степень двойки. Докажите, что он что-то перепутал.

Решение:

Известно, что натуральное число дает такой же остаток от деления на 3, что и сумма его цифр. В огромном числе такая же сумма цифр, как во всех числах от 1 до 100 500, то есть его остаток от деления на 3 такой же, что и у суммы чисел от 1 до 100 500. А эта сумма делится на 3. Получаем, что на бумажке было написано число, кратное трём, и это не степень двойки. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 4 балла.
- Арифметические ошибки, не влияющих на рассуждение, — не более 3 баллов.
- Решения, опирающиеся на какой-то конкретный порядок клочков, — 0 баллов.

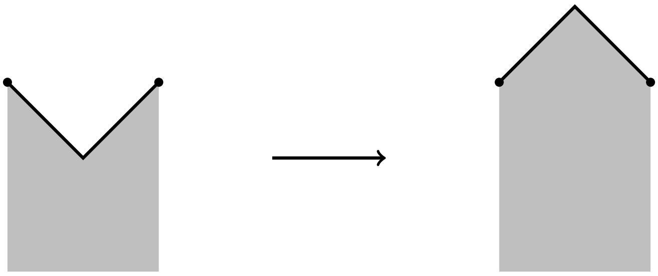
5. Из 16 одинаковых кусков проволоки (см. правый рисунок) нужно выложить замкнутый контур. Все звенья должны идти либо горизонтально, либо вертикально. Какую наибольшую площадь можно так ограничить?

Решение:

Заметим, что выложить контур из 16 данных кусков — то же самое, что выложить фигуру из 16 одинаковых отрезков, лежащих под углом 45°, а потом положить на каждый отрезок кусок так, чтобы концы куска и отрезка совпали.

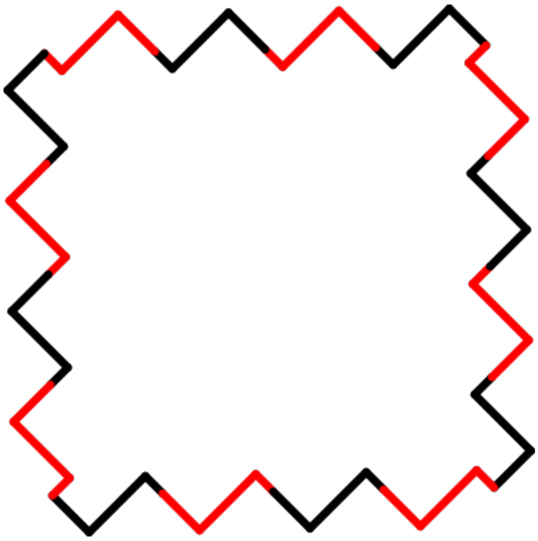
Когда мы заменяем отрезок на кусок проволоки, площадь, ограничиваемая контуром, либо растет на 1,5 см^2, либо уменьшается на ту же самую величину. То есть площадь итогового контура превышает площадь фигуры, ограничиваемой отрезками, максимум на $1{,}5 \cdot 16 = 24$ см^2.

Теперь займемся поиском фигуры максимальной площади, которую можно ограничить вышеописанными отрезками. Все углы в нашей фигуре либо 90°, либо 270°. Если там есть второй угол — то площадь можно увеличить:



Таким образом, искомая фигура — прямоугольник. Их можно, например, перебрать, получить, что максимальная площадь у квадрата: 288 см^2.

В итоге имеем оценку $288 + 24 = 312$ см^2, которая достигается, например так:



□

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Правильный ответ — 1 балл.
- Верный пример — 1 балл.
- Идея, что надо заменить куски проволоки на отрезки и искать многоугольник наибольшей площади — 1 балл.
- Объяснение, что фигура данного периметра с наибольшей площадью обязательно выпукла — 1 балл.
- Вывод из предыдущего утверждения, что эта фигура — квадрат — 1 балл.

6. В отряде сто человек, у каждого по три друга в отряде. На дежурство требуется назначать по три человека, среди которых каждый дружит с каждым. 99 дней подряд удавалось назначать тройки дежурных, не повторяя их. Докажите, что это удастся и на сотый день.

Решение:

Назовем *лентяем* человека, который дежурил меньше трех раз. Остальных назовем *трудолюбивыми*. Если сложить, сколько подежурил каждый из людей, то, так как каждый раз дежурит трое, получится $99 \cdot 3 = 300 - 3$. Ясно, что больше трех раз не подежурить, а тогда лентяев не более трёх.

Посмотрим на какого-нибудь лентяя, пусть его зовут Петя. У Пети есть трудолюбивый друг, иначе лентяев слишком много. Этот друг только один раз мог подежурить без Пети. Значит, Петя дежурил ровно дважды.

А если у Пети два трудолюбивых друга, то каждый дважды дежурил с Петей. То есть каждое Петино дежурство включало именно этих друзей, хотя тройки дежурных по условию не повторялись. Значит, два Петиных друга тоже лентяи.

Так как лентяев всего трое, то они дружат друг с другом. Но подежурить вместе они еще не могли: каждый дежурил с каким-то трудолюбивым другом. Значит, мы нашли претендентов на 100-е дежурство, что и требовалось. □

Критерии оценки:

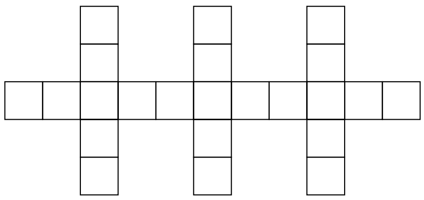
- Полное решение — 6 баллов.
- Утверждение, что 100 — это максимальное количество дежурств и оно достигается при разбиении на четверки попарно дружащих — 1 балл.

7. При каких $n \geqslant 5$ любую фигурку из $1+2+3+\ldots+n$ клеток можно разрезать по сторонам клеток на n фигурок попарно различной площади?

Решение:

Ни при каких. Сконструируем для каждого $n \geqslant 5$ фигурку, которую нельзя разрезать требуемым образом.

Выберем пока произвольные натуральные числа x и l, возьмем прямоугольник $1 \times (x+l+xl)$. К каждой $(l+1)$-ой клетке подсоединим по бокам два прямоугольника $l \times 1$. Получится фигура из $3xl+x+l$ клеток. Например, при $l=2$, $x=3$ получится такая фигура:



Теперь обратим внимание на x клеток, имеющих по 4 соседа. Любая фигура из хотя бы $l+1$ клетки занимает одну из них, то есть в любом разрезании такой фигурки на части будет не более x частей размера $> l$.

Пусть теперь $x = \lfloor n/2 \rfloor$ и $l = \lceil n/2 \rceil - 1$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ и $\lceil\cdot\rceil$ обозначают округление вниз и вверх соответственно). Проверим, что в полученной фигуре больше, чем $1+2+3+\ldots+n$ клеток. Действительно, при $n=5$ имеем

$$3xl+x+l = 3\cdot 2\cdot 2+2+2 = 16 > 15,$$

а при переходе от n к $n+1$ ровно одно из чисел x и l увеличивается на 1 (например, потому что $x+l=n-1$). То есть искомое выражение увеличивается на $3x+1$ или $3l+1$. Легко видеть, что к искомому выражению добавляется больше, чем $n+1$, то есть неравенство сохраняется.

Осталось удовлетворить условие, что в фигуре должно быть *ровно* $1+2+\ldots n$ клеток, и проверить, что разрезать нельзя. Выкинем нужное число клеток, чтобы фигурка осталась связной. Если мы можем разрезать полученную фигурку нужным образом, то, возвращая выкинутые клетки и приклеивая их к частям как попало, получаем разрезание исходной фигуры на n кусков, где не более $\lceil n/2 \rceil - 1$ частей размера $\lceil n/2 \rceil - 1 = l$. А тогда частей размера больше l у нас $n - (\lceil n/2 \rceil - 1) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = x+1 > x$. Полученное противоречие завершает решение. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 7 баллов.
- Только верный ответ — 1 балл.
- Только примеры при конкретных значениях n — не более 3 баллов.

- Только примеры для бесконечных семейств значений n, не покрывающих все числа > 5, — не более 5 баллов.

8. В туманном городе Лондоне ровно 10^{10} клубов, а в каждом клубе ровно 10 джентльменов. Вражеский шпион хочет похитить несколько джентльменов так, чтобы среди похищенных был хотя бы один член каждого клуба. Оказалось, что для любых двух клубов найдётся джентльмен, состоящий в них обоих. Докажите, что шпиону достаточно похитить 9 джентльменов.

Решение:

Рассмотрим произвольный клуб, например «Диоген». Поскольку для произвольного клуба в нем состоит некий джентльмен из «Диогена», один из джентльменов «Диогена» (скажем, Вася) состоит более чем в 10^9 клубах.

Пусть шпиону недостаточно похитить только Васю, тогда существует клуб «Диоген-2», в котором не состоит Вася. Тогда во всех клубах, в которых состоит Вася, есть некий джентльмен из Диогена-2. Значит, существует джентльмен из Диогена-2 (Вася-2), который состоит вместе с Васей более чем в 10^8 клубах.

Продолжая такие рассуждения, получаем, что существуют такие джентльмены Вася, Вася-2, ..., Вася-10, что они все состоят более чем в 1 клубе. Противоречие.

$\square$

Критерии оценки:

- Полное решение — 8 баллов.
- Любые попытки рассматривать «наихудший» случай без объяснения, что значит «наихудший» и почему этого достаточно, не оценивались.

8 класс

1. Дан ряд из 13 чисел: 1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_11_12_13. Поставьте вместо каждого пропуска знак сложения или умножения так, чтобы получилось 2018.

Решение:
$1+2+3+4+5\cdot 6\cdot 7+8\cdot 9+10+11\cdot 12\cdot 13=2018$. (Можно также $1\cdot 2\cdot 3$ вместо $1+2+3$.) □

Критерии оценки:

- Полное решение — 3 балла.
- Любое неверное решение (в т. ч. с перестановкой цифр или с использованием скобок) — 0 баллов.

2. Вася выписал 20 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Докажите, что найдутся два числа, стоящих рядом, у которых совпадает хотя бы одна цифра.

Решение:
Среди 20 последовательных чисел найдутся 10 из одного десятка, причем не однозначные; у них совпадает цифра в разряде десятков — обозначим ее через N.

Кроме того, каждая цифра, в частности N, ровно два раза встречается среди последних цифр 20 подряд идущих чисел; из них — только один раз в обозначенном нами десятке.

Таким образом, у нас есть одиннадцать чисел с цифрой N. Тогда если разбить 20 выписанных Васей чисел на 10 пар рядом стоящих, найдется пара, в которой оба числа содержат N. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- За каждую из идей «найдутся 10 чисел с одинаковой цифрой в разряде десятков», «ещё в одном числе эта цифра встречается в разряде единиц», «среди 11 чисел из 20 обязательно найдутся два рядом стоящих» — по 1 баллу, если эти идее относятся к произвольной расстановке чисел, а не к конкретному примеру.
- Наличие ошибочных утверждений типа «чтобы никакие два из 10 чисел не были расположены рядом, они должны стоять *через одно*» — не более 4 баллов.
- Правильность утверждения продемонстрирована только для конкретного примера — 0 баллов.

3. Можно ли разбить числа от 0 до 1000 на семёрки так, чтобы в каждой семёрке сумма каких-то двух чисел равнялась сумме пяти остальных?

Решение:
Поскольку $1001:7=143$, то должно получиться 143 семёрки, и в каждой из них сумма пяти чисел равна сумме двух остальных, то есть половине общей суммы. Значит, $143\cdot 5=715$ чисел в сумме должны составлять половину от всех чисел.

Заметим, однако, что сумма всех чисел равна

$$0+1+2+\ldots+1000=\frac{(0+1000)\cdot 1001}{2}=500\cdot 1001=500500,$$

а сумма 715 чисел не меньше, чем

$$0+1+2+\ldots+714=\frac{(0+714)\cdot 715}{2}=357\cdot 715=255255.$$

Значит, сумма 715 чисел всегда больше, чем сумма оставшихся 286 чисел, и требуемое разбиение невозможно. □

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Подсчёт количества групп или количества «больших» чисел не оценивался.
- Суммы чисел указаны без пояснения, как они найдены — не более 4 баллов.

4. Дорога между пунктами А и В состоит только из наклонных участков: иногда она идёт в гору (вверх), а иногда под гору (вниз). Никита идёт в гору со скоростью 3 км/ч, а под гору со скоростью 5 км/ч. Первую половину пути из А в В он прошёл за 32 минуты, а вторую половину — за 37 минут. Возвращаясь из В в А, он преодолел первую половину пути за 36 минут. Сколько времени ему потребуется на вторую половину?

Решение:

Рассмотрим ту половину пути, которая ближе к В. Никита прошёл её дважды: в одном направлении за 37 минут, в другом за 36, то есть суммарно потратил 73 минуты. Заметим, что каждый из наклонных участков за это время пройден один раз вверх и один раз вниз, поэтому общая длина пути вверх равна общей длине пути вниз. Значит, чтобы пройти полдороги вверх и полдороги вниз, нужно 73 минуты.

Но то же самое относится и к той половине пути, которая ближе к А. Значит, её преодоление в две стороны тоже занимает 73 минуты. Поскольку в одну сторону Никита прошёл её за 32 минуты, то на обратный путь нужна 41 минута. □

Замечание. Можно также решить эту задачу, составив систему уравнений.

Критерии оценки:

- Полное решение — 5 баллов.
- Использованы вычисления с округлением промежуточных результатов — не более 4 баллов.

5. Даны три натуральных числа, одно из которых равно наибольшему общему делителю двух других. Антон заменил цифры в десятичной записи этих чисел буквами, причём одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, разные — разными. В результате числа приняли вид МИМИМИ, ФЫРФЫР и ЛИСА. Какое наименьшее значение может принимать число ЛИСА?

Решение:

Очевидно, что НОДом является наименьшее из трёх чисел, то есть

$$\text{НОД}(\text{МИМИМИ}, \text{ФЫРФЫР}) = \text{ЛИСА}.$$

Заметим, что $\text{МИМИМИ} = 10101 \cdot \text{МИ} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \text{МИ}$, $\text{ФЫРФЫР} = 1001 \cdot \text{ФЫР} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \text{ФЫР}$, поэтому их НОД делится на $7 \cdot 13 = 91$. Наименьшее четырёхзначное число, кратное 91, равно 1001, но в нём есть совпадающие цифры. Поэтому минимальное подходящее число $\text{ЛИСА} = 1092$.

Такой пример существует: например, $\text{МИ} = 80$, $\text{ФЫР} = 564$, тогда

$$\begin{gathered}\text{НОД}(808080, 564564) = \text{НОД}(3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 2^4,\ 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 47) = \\ = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^2 = 91 \cdot 12 = 1092.\end{gathered}$$

□

Критерии оценки:

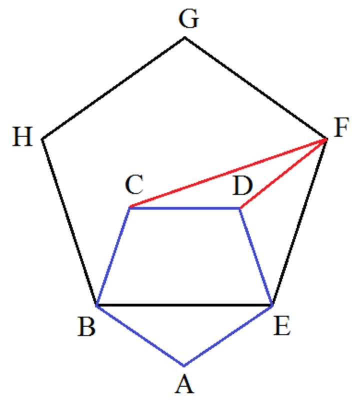
- Полное решение — 5 баллов.
- Разложение чисел МИМИМИ и ФЫРФЫР в произведение $10101 \cdot \text{МИ}$ и $1001 \cdot \text{ФЫР}$ — 1 балл.
- Доказано, что НОД делится на 91 — 1 балл.
- Доказано, что НОД не меньше 1092 — 1 балл.

- Верный ответ с примером — 2 балла
- Утверждение о том, что именно число ЛИСА является НОДом, не оценивается.
- Баллы снижаются за неверные утверждения, например: «НОД(МИМИМИ, ФЫРФЫР = $= 91 \cdot$ НОД(МИ, ФЫР)» (это неверно, когда ФЫР кратно 3, а МИ не кратно 3).

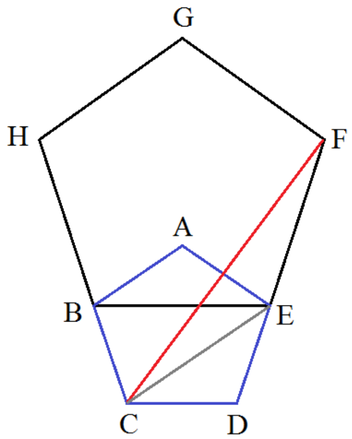
6. $ABCDE$ и $BEFGH$ — правильные пятиугольники на плоскости. (Правильный пятиугольник — это такой, у которого все стороны равны, а каждый угол равен $108°$.)
а) Найдите величину угла CFD.
б) Докажите, что к восьми упомянутым в условии точкам можно добавить ещё восемь так, чтобы полученные 16 точек служили вершинами шести правильных пятиугольников.

Решение:

(а) Обозначим сторону пятиугольника $ABCDE$ через a, а сторону $BEFGH$ — через b. Возможны два случая взаимного расположения пятиугольников.



Случай 1



Случай 2

Случай 1. В треугольнике ABE стороны AB и AE равны a, $BE = b$, $\angle BAE = 108°$, поэтому $\angle ABE = \angle AEB = (180° - 108°)/2 = 36°$.

Треугольники DEF и AEB равны по первому признаку, т. к. $AE = DE = a$, $BE = FE = b$, $\angle DEF = 108° - \angle DEB = \angle AEB$. Значит, $DF = AB = a$, $\angle EDF = \angle EAB = 108°$.

Треугольник CDF равнобедренный ($CD = DF = a$), а угол против основания равен $\angle CDF = 360° - 108° - 108° = 144°$. Значит, $\angle CFD = (180° - 144°)/2 = 18°$.

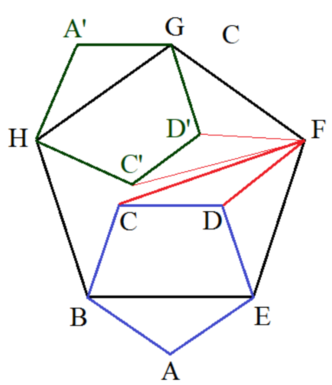
Случай 2. $\triangle ABE = \triangle CDE$, т. к. они оба равнобедренные ($AB = AE = DC = DE = a$) с углами при основании $\angle A = \angle D = 108°$. Поэтому $CE = BE = b$; $\angle BEA = (180° - 108°)/2 = 36°$.

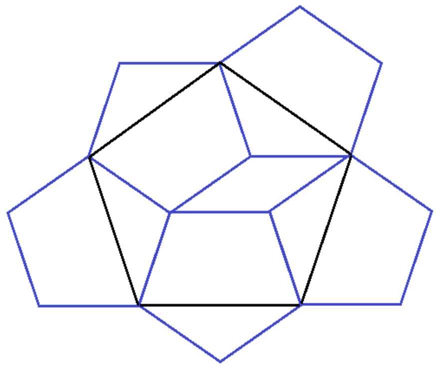
$\angle FED = \angle FEA + \angle AED = \angle FEB - \angle BEA + \angle AED = 108° - 36° + 108° = 180°$, то есть точка E лежит на отрезке FD, и вместо угла CFD можно искать угол CFE.

Поскольку $CE = b$ (см. выше), $EF = b$, то $\triangle FEC$ равнобедренный. Угол против основания в нём равен $\angle FEC = 180° - \angle CED = 180° - 36° = 144°$, поэтому $\angle CFE = (180° - 144°)/2 = 18°$.

Таким образом, искомый угол CFD в обоих случаях равен $18°$.

(б) Вернёмся к случаю 1. В этом случае $\angle CFE = \angle CFD + \angle DFE = 18° + 36° = 54° = \angle GFE/2$, то есть CF — биссектриса $\angle GFE$. Пусть $A'HC'D'G$ — правильный пятиугольник, вершины C' и D' которого лежат внутри $BEFGH$. Покажем, что точка C' совпадает с точкой C. Действительно, расчёты для треугольника $FD'C'$ (как в пункте а) приведут нас к тому, что две его стороны равны a, а углы — $18°, 18°, 144°$, то есть он равен $\triangle FDC$, и $FC' = FC$. Кроме того, тем же способом, что и в пункте а), получим $\angle GFC' = 54°$. Значит, FC' — тоже биссектриса угла GFE, поэтому она совпадает с лучом FC. Поскольку отрезки FC и FC' равны, то точка C' совпадает с C.

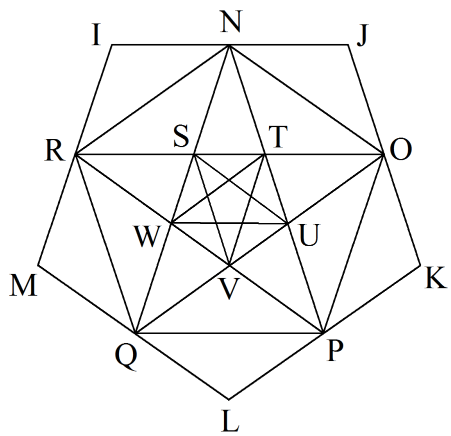




Далее, из этого следует, что $CH = CB$. Кроме этого, $\angle HBC = \angle HBE - \angle CBE = \angle HBE - (\angle CBA - \angle ABE) = 108^\circ - (108^\circ - 36^\circ) = 36^\circ$. Значит, $\triangle HBC$ — равнобедренный с углами $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$, поэтому его можно достроить до правильного пятиугольника.
То же верно про треугольник DEF (доказано в пункте а) и аналогичный ему треугольник $D'GF$, поэтому каждый из них можно достроить до правильного пятиугольника. Как видно на рисунке 3, всего получается 16 вершин и 6 правильных пятиугольников.

Что если точки изначально располагались как в случае 2? Заметим, что такие 8 точек тоже легко найти среди 16 точек на рисунке 3, то есть они дополняются до такого же множества.

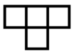
Замечание. Некоторые участники придумали конструкцию с лучшими свойствами, чем в решении жюри. Можно отметить 15 точек так, чтобы они служили вершинами 8 правильных многоугольников. Для этого надо взять правильный многоугольник $IJKLM$; отметить в нём середины сторон N, O, P, Q, R; соединить их отрезками, которые пересекаются в точках S, T, U, V, W. Получим 8 правильных многоугольников — внешний, внутренний, пять прилежащих к вершинам внешнего и один, образованный серединами сторон (доказательство их правильности оставляем читателю). Два исходных пятиугольника присутствуют на рисунке: в случае 1 это $INTWR$ и $NOPQR$; в случае 2 — $INTWR$ и $STUVW$.



□

Критерии оценки:

- Полное решение — 10 баллов.
- **Пункт (а):** 5 баллов.
  - Разобран только один случай — не более 3 баллов.
  - Нарисованная картинка с верным ответом — по баллу за каждый из случаев.
  - Указано существование двух случаев без дальнейших продвижений — 1 балл.
- **Пункт (б):** 5 баллов. Требуется описать, как строится пример (примеры) и доказать, что все пятиугольники правильные.
  - Разобран только один случай, картинка подходит и ко второму, но это не упомянутой — не более 4 баллов.
  - Разобран только один случай, и картинка под второй случай не подходит — не более 3 баллов.
  - Верные картинки без обоснования корректности — по 1 баллу за каждый из случаев.

7. Какое наименьшее количество Т-тетрамино надо вырезать из шахматной доски так, чтобы больше ни одного Т-тетрамино вырезать было нельзя? Т-тетрамино — это четырёхклеточная фигурка в виде буквы Т:  .

Решение:

Ответ: 7. *Пример* показан на рис. 1.

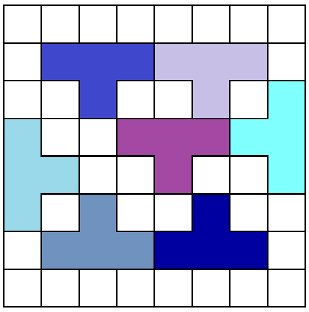


Рисунок 1

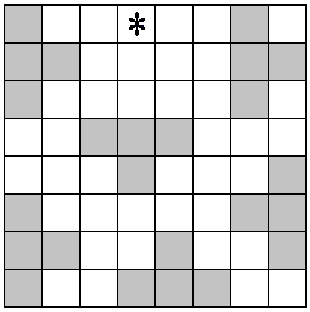


Рисунок 2

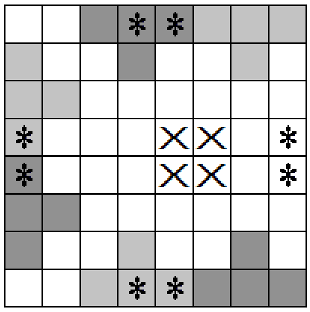


Рисунок 3

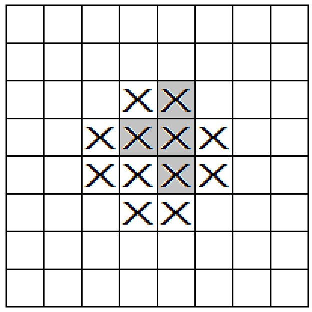


Рисунок 4

Оценка. Предположим, что нам удалось отметить 6 или менее тетрамино требуемым образом. Тогда каждая из тетраминошек, закрашенных на рис. 2, должна пересекаться с одной из отмеченных тетраминошек (иначе можно было бы отметить ещё одну тетраминошку). Однако одна отмеченная тетраминошка не может пересекаться с двумя или более закрашенными. Поэтому каждая отмеченная тетраминошка должна пересекать ровно одну закрашенную. Но тогда клетка, помеченная звёздочкой, не входит ни в одну отмеченную тетраминошку.

Итак, если можно отметить на доске 6 тетраминошек, то ни одна из них не содержит клеток наподобие отмеченных звёздочкой. Посмотрим на рисунок 3. Здесь тоже ни одна отмеченная тетраминошка не может пересекать более одной закрашенной, поэтому каждая отмеченная пересекает ровно одну закрашенную. Но тогда 4 клетки, помеченные крестиком, не содержат отмеченных тетраминошек.

Рассматривая клетки, симметричные тем, что помечены крестиками, получаем большую область в центре квадрата (см. рис. 4), в которой не может быть тетраминошек. Очевидно, туда можно поместить ещё одну тетраминошку.

□

Критерии оценки:

- Полное решение — 9 баллов.
- Пример: на 7 тетрамино — 3 балла, на 8 тетрамино — 1 балл; на 9 и более — 0 баллов.
- Оценка: на 7 тетрамино — 6 баллов; на 6 тетрамино — 1 балл.