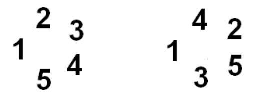
Олимпиада Юношеской Математической Школы 2012 г.
Решения задач первого (заочного) тура
7–8 классы

1. *Пятеро детей водили хоровод вокруг ёлки 30-го и 31-го декабря. Верно ли, что, как бы они ни встали в хоровод 31-го, найдутся двое соседей, которые уже были соседями в хороводе 30-го?*

Это утверждение неверно. Если 30-го декабря порядок детей был таким: 12345, то 31-го он может быть, например, 14253.



2. *В доме все комнаты прямоугольные. В одной из комнат в стене последовательно расположены три двери с такими надписями.*
Первая дверь: «Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и вторая дверь».
Вторая дверь: «Эта дверь ведёт в комнату, в которую не ведут ни первая, ни третья дверь».
Третья дверь: «Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и первая дверь».
Ровно одно из этих утверждений ложно. Какое? (Укажите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.)

Если утверждение на первой двери ложно, то на двух других — истинно; тогда первая и третья дверь ведут в одну и ту же комнату, а вторая — в другую. Это невозможно, поскольку двери расположены по порядку, а комнаты прямоугольные.
Значит, утверждение на первой двери истинно. Тогда на второй — ложно, т.к. противоречит утверждению на первой. Значит, на третьей — истинно. Это действительно возможно (для этого все двери должны вести в одну комнату).

Замечание. Верное решение включает следующее:
1) утверждение, что надпись на второй двери может оказаться ложной, с приведением примера (просто фраза «поскольку первое и третье утверждения не противоречат друг другу» ничего не доказывает);
2) доказательство того, что все другие варианты невозможны (оно может проводиться разными способами, но должно присутствовать и быть достаточно чётким).

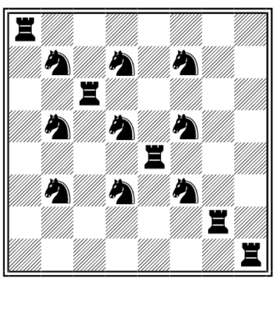
3. *Максим сложил два числа. После этого он заменил все цифры на буквы (одинаковые цифры — на одинаковые буквы, разные — на разные). Получился такой пример: ЗАДАЧА + УДАЧА = РЕШЕНИЕ. Докажите, что Максим где-то ошибся.*

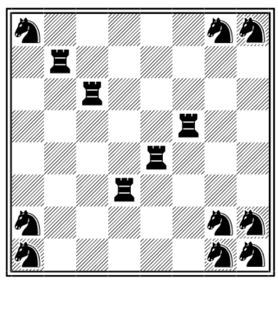
1) Заметим, что З=9, Р=1, Е=0, иначе разность РЕШЕНИЕ−ЗАДАЧА превышает 100000 и не может равняться числу УДАЧА.
2) Посмотрим на разряд единиц: А+А=Е или А+А=Е+10; поскольку Е=0, то А=0 или 5; т.к. А и Е различны, то А=5.
3) В разряде сотен при сложении А+А (т.е. 5+5) получается Н; значит, Н равно нулю или (при переполнении из предыдущего разряда) единице. Но оба варианта уже заняты буквами Р и Е.

Замечание. Популярным оказалось такое решение: «в последнем разряде А+А=Е, а в четвёртом с конца Д+Д=Е, и одно противоречит другому». Это неверно: например, могло бы быть А=2, Д=7, Е=4. Эту мысль можно довести до верного решения, но для этого надо использовать то, что Е=0 и А=5. При использовании этого получается, что Д+Д(или Д+Д+1)=0(или 10), откуда Д=0 или Д=5, но оба варианта заняты буквами Е и А.

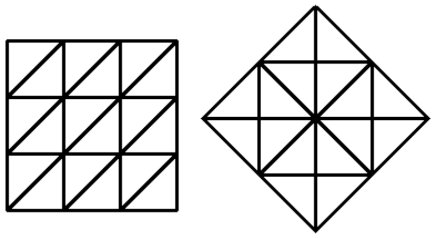
4. *На шахматной доске стоят 5 ладей и несколько коней, причём никакие две фигуры не бьют друг друга. Каково максимально возможное количество коней? (Не забудьте доказать, что оно действительно максимально.)*

Пять ладей, не бьющих друг друга, при любом расположении занимают пять горизонталей и пять вертикалей. Все клетки, не побитые ладьями, находятся на пересечении трёх оставшихся вертикалей и трёх оставшихся горизонталей, поэтому таких клеток 3·3=9. Значит, коней может оказаться не больше девяти. Девять коней можно расставить, например, одним из показанных на рисунке способов.



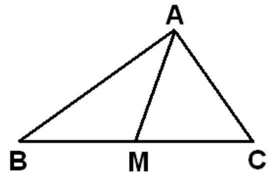


5 (для 7 класса). *Придумайте такую фигуру, что и из 16, и из 18 её экземпляров можно сделать квадрат. Все экземпляры должны быть равными, то есть одинаковыми по форме и размеру.*



Эта фигура — равнобедренный прямоугольный треугольник. Заметим, что и из двух, и из четырёх треугольников можно сделать квадраты, а уже из них легко собрать квадраты с нужным количеством треугольников (см. рисунок).

5 (для 8 класса). *Костя нарисовал треугольник и точно измерил в нём длины трёх сторон и трёх медиан. У него получилось шесть различных чисел. Эти числа он сообщил Саше, не уточняя, какие из них — длины сторон, а какие — длины медиан. Докажите, что Саша сможет определить хотя бы одно из чисел, являющееся длиной стороны.*



Самое большое из шести названных чисел является длиной стороны. Действительно, длина медианы не может быть наибольшим числом, поскольку медиана короче хотя бы одной из двух сторон, между которыми проходит. Это следует, например, из теоремы о том, что напротив большей стороны в треугольнике лежит больший угол (действительно, один из углов AMB и BMC не меньше 90°; пусть, например, это угол AMB, тогда он является наибольшим углом в треугольнике AMB, и AB>AM).

6. *Есть 11 трёхзначных чисел. В каждой паре этих чисел большее поделили на меньшее с остатком. Все остатки получились отличными от нуля. Доказать, что один из остатков не меньше 10.*

Пусть x — наименьшее из чисел набора. Поделим остальные 10 чисел на x с остатком. Поскольку допустимых значений для остатка всего девять (от 1 до 9), а чисел десять, то какие-то два остатка равны. Иначе говоря, в наборе есть два числа вида $A=ax+r$ и $B=bx+r$, $a<b$.
Поделим B на A с остатком: $B=kA+s$, или $bx+r=k(ax+r)+s$, где r и s от 1 до 9 (остатки от деления на x), a, k и b — тоже от 1 до 9 (неполные частные при делении одних трёхзначных чисел на другие, меньшие их). Получается, что $(b-ka)x=(k-1)r+s$. Это равенство невозможно, поскольку правая часть больше нуля (т.к. $k-1\geq 0$, $s>0$) и не больше $8\cdot 9+9=81$, а левая часть делится на трёхзначное число x (и поэтому либо равна нулю, либо не меньше 100).

7. *Маша положила на стол несколько отрезков и обнаружила четыре квадрата, все стороны которых лежат на этих отрезках. Все четыре квадрата были разных размеров. Докажите, что Маша может переложить отрезки так, чтобы квадратов оказалось шесть (и все разных размеров).*

Докажем сначала, что для составления четырёх разных квадратов требуется не меньше восьми отрезков.
1) Можно считать, что все отрезки параллельны сторонам какого-то одного квадрата (т.е. «вертикальны или горизонтальны»). Действительно, если есть два квадрата с непараллельными сторонами, то все их стороны образованы различными отрезками, то есть уже требуется 8 отрезков. Если же отрезки, не параллельные сторонам какого-то квадрата, не участвуют в образовании других квадратов, то их можно убрать, и число отрезков уменьшится.
2) Пусть отрезков меньше восьми, тогда отрезков какого-то направления (вертикального или горизонтального) меньше четырёх. Пусть, например, горизонтальных отрезка всего три, и они лежат на прямых p, q, r. Тогда есть всего три различных значения, которым может равняться сторона квадрата: расстояние между p и q, расстояние между p и r и расстояние между q и r. Однако из условия известно, что имеются четыре квадрата разных размеров. (Если горизонтальных отрезков меньше трёх, то это доказательство тем более проходит.)
Итак, отрезков не менее восьми.
3) Тогда нетрудно переложить отрезки так, как показано на рисунке (в качестве «одной клетки» выбирается длина, не превосходящая 1/6 длины самого короткого отрезка). На этой картинке есть квадраты шести различных размеров (со стороной от 1 до 6 клеток). Если изначально отрезков было больше восьми, то остальные можно расположить как угодно.