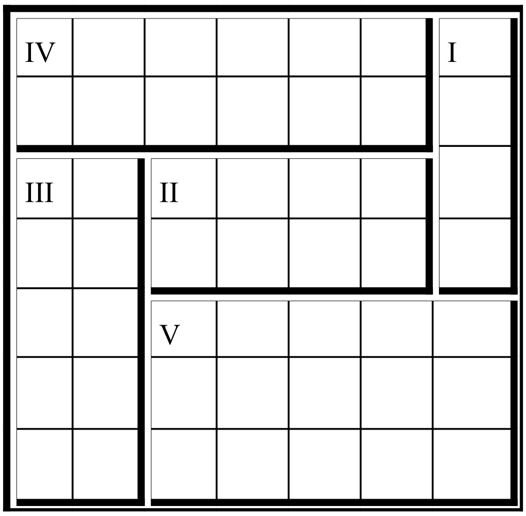
Заочная олимпиада 5-6 класса ЮМШ, 2012.
Решения задач

Задача 1

Составьте квадрат 7×7 клеток из пяти таких прямоугольников: 1×4, 2×4, 2×5, 2×6, 3×5.

Обозначим прямоугольники: I - 1×4, II - 2×4, III - 2×5, IV - 2×6, V - 3×5, тогда, используя их можно составить квадрат:



Задача 2

Среди трёх Маш, трёх Ань и двух Даш — четыре блондинки и четыре брюнетки. Может ли оказаться так, что у каждой девочки в этой компании есть хотя бы одна тёзка с тем же цветом волос? Не забудьте обосновать свой ответ.

Не может.

Все Маши должны иметь волосы одного цвета (иначе одна из них будет отличаться от двух других, и для неё не найдётся тезки того же цвета). Все Ани – тоже. Допустим, Маши – блондинки. Тогда Ани должны быть брюнетками (так как блондинка осталась только одна), и получаем, что Даши – блондинка и брюнетка. Ни у одной из них нет тезки с тем же цветом волос.

Задача 3

В доме все комнаты прямоугольные. В одной из комнат в стене последовательно расположены три двери с такими надписями.
Первая дверь: «Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и вторая дверь».
Вторая дверь: «Эта дверь ведёт в комнату, в которую не ведут ни первая, ни третья дверь».
Третья дверь: «Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и первая дверь».
Ровно одно из этих утверждений ложно. Какое? (Укажите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.)

Второе высказывание ложно.

Первое и второе высказывание противоречат друг другу в плане того, ведут ли первая и вторая дверь в одну комнату. Значит, среди них точно есть ложное. Поэтому третьему высказыванию остается быть истинным. Но раз первая и третья двери ведут в одну комнату, то и вторая дверь ведет в ту же комнату, иначе она не будет прямоугольной, а будет иметь выемку в районе второй двери. Поэтому все три двери ведут в одну комнату. В этой ситуации ложным будет только второе высказывание.

Задача 4

На доске написано 100 чисел: 2, 4, 6, ..., 200. За один ход можно поменять местами два числа, если одно из них делится на другое. Можно ли с помощью таких действий переставить эти числа в обратном порядке: 200, 198, 196, ..., 2? Не забудьте обосновать свой ответ.

Числа переставить в обратном порядке возможно, т.к. все числа делятся на 2 и поэтому менять местами числа можно с помощью цифры 2. Например:

Исходный числовой ряд	2,4,6,8,……….194,196,198,200
1) меняем местами 2 и 200	200, 4,6,8…….194,196,198,2
2) меняем 2 и 4	200,2,6,8,……194,196,198,4
3) меняем 2 и 198	200,198,6,8…….194,196,2,4
4) меняем 2 и 6	200,198,2,8……..194,196,6,4
5) меняем 2 и 196	200,198,196,8………194,2,6,4
6) меняем 2 и 8	200,198,196,2…………194,8,6,4
7) меняем 2 и 194	200,198,196,194…………2,8,6,4

...

(В конце концов все числа, кроме 2 окажутся там, где нам нужно, а 2 будет в центре. Затем сместим ее вправо).

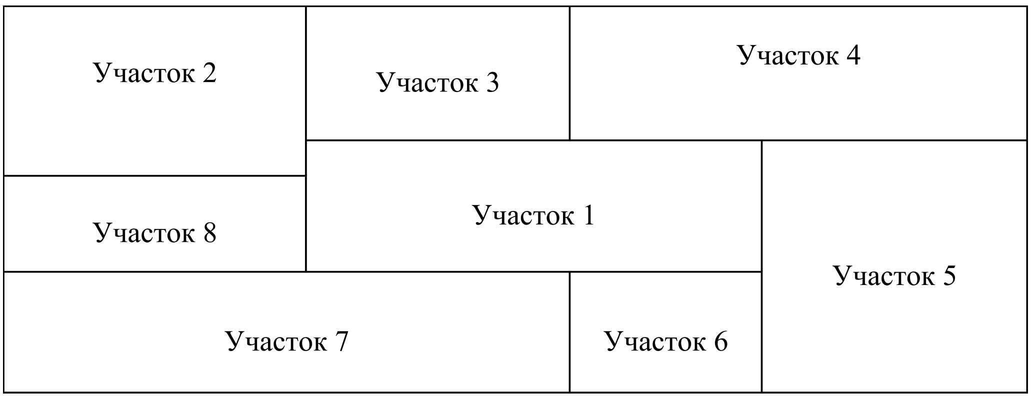
...

n) меняем 2 и 8	200,198,196,194…………. 8,2,6,4
n+1) меняем 2 и 6	200,198,196,194…………8,6,2,4
n+2) меняем 2 и 4	200,198,196,194…………8,6,4,2

Задача 5

У короля есть прямоугольный остров, разбитый на несколько прямоугольных участков, принадлежащих феодалам. В ответ на заданный каждому вопрос «сколько у Вас соседей?» было дано ровно два вида ответов: «три» и «семь» (участки соседние, если у них есть общий отрезок границы). При каком наименьшем количестве участков такое возможно? Не забудьте обосновать свой ответ.

Если один участок какого-нибудь из феодалов граничит с семью соседними участками, значит участков должно быть минимум 8 (1 этот участок и 7 соседних) Пример такого расположения приведён на картинке.



Задача 6

Максим сложил два числа. После этого он заменил все цифры на буквы (одинаковые цифры на одинаковые буквы, разные — на разные). Получился такой пример: ЗАДАЧА + УДАЧА + РЕШЕНИЕ. Докажите, что Максим где-то ошибся.

+		9	А	Д	А	Ч	А
			У	Д	А	Ч	А
	1	0	Ш	0	Н	И	0

Т.к. при сложении в следующий разряд может перейти только1, то З=1, Е = 0, Р = 1

+		9	5	Д	А	Ч	5
			У	Д	А	Ч	5
	1	0	Ш	0	Н	И	0

Т.к. последняя цифра 0, А не равно 0, значит

А = 5.

+		9	5	Д	А	Ч	5
			У	Д	А	Ч	5
	1	0	Ш	0	Н	И	0

Рассмотрим разряд сотен. Заменим цифрами значение А: 5+5=10, значит 1 сотня переходит в разряд тысяч, следовательно Д+Д =9, чего не может быть.

Задача 7

В алфавите племени АБУМ две гласные буквы — А, У и две согласные — Б, М. Все слова племени АБУМ состоят из 13 букв, причём гласные чередуются с согласными. Слова, которые содержат комбинацию БУ или БАМ, считаются плохими, а слова, которые содержат БА или МАМ, — милыми. Каких слов больше — плохих или милых? Не забудьте обосновать свой ответ.

Решение 1 (подсчетом)

Выкинем плохие милые слова, т.к. от них не зависит, каких слов больше – милых или плохих. Значит, нам нужно сравнить количество плохих немилых и милых неплохих.

Рассмотрим милые неплохие слова. Заметим, что если в таком слове есть Б, то после неё может идти только АБАБА… (иначе получим БУ или БАМ). Тем самым, мы можем разбить милое неплохое слово на два блока – блок М: *М*М*М*М… и блок Б: БАБАБА...(при этом какого-то из этих блоков может и не быть).

Вариантов блока М, в котором ровно k гласных – 2^k (т.к. каждая из них – либо А, либо У).

Пусть блок Б начинается с места под номером k. Если k чётно, то в предшествующем блоке М k/2 гласных (т.е. $2^{k/2}$ вариантов), а если нечётно, то (k−1)/2 гласных. Сложим количество таких вариантов для мест с первого по 13-е: $1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + \ldots 2^6 + 2^6 = 253$. Отсюда надо вычесть неподходящие МУМУМУМУМУМ[У/А]Б, т.е. имеем 251. Если блока Б нет, то $2^7-4=124$, если начинается с гласной, и $2^6-4=63$, если с М.

Итого: 251 + 124 + 63= 438.

Теперь докажем, что плохих немилых слов больше.

Количество плохих слов вида [Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М] равно $2^7 - 2$ (т.к. не подходят только МУМУ...МУ[Б/М]).

Если мы заменим в любом из шести мест *У* на МАБ, получится 2^5 [выбор остальных согласных] * 6 [выбор места] − 1 (т.к. не подходит только МУ...МУМАБ).

Количество плохих слов вида [А/У][Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У равно 2^7-2 (т.к. не подходят только [АУ]МУМУ...МУ).

Уже получили 126 + 191 + 126 = 443 > 438.

Решение 2 (соответствием)

Выкинем плохие милые слова, т.к. от них не зависит, каких слов больше – милых или плохих. Т.е. нам нужно сравнить количество плохих немилых и милых неплохих.

Рассмотрим милые неплохие слова. Заметим, что если в таком слове есть Б, то после нее может идти только АБАБА… (иначе получим БУ или БАМ). Тем самым, мы можем разбить милое неплохое слово на два блока – блок М: *М*М*М*М… и блок Б: БАБАБА...(при этом какого-то из этих блоков может и не быть).

Теперь найдём каждому милому неплохому слову в пару плохое немилое слово. Для этого мы сделаем с милым неплохим словом следующее:

1. Блок М: все МА заменяем на БУ.

2. Блок Б: все БА, кроме первого, заменяются на БУ, а первое БА заменяется на МА.

Примеры:

МАМУМУМУМАБАБ => БУМУМУМУБУМАБ

МАМУМУМУМАМАБ => БУМУМУМУБУБУБ

МАМУМУМУМАМАМ => БУМУМУМУБУБУМ

АМУМУМУМАМАМА => АМУМУМУБУБУБУ

АМУМУМУМАМАБА => АМУМУМУБУБУМА

АМУМУМУМАБАБА => АМУМУМУБУМАБУ

Заметим, что, во-первых, после этого преобразования слово перестало быть милым, т.к. буква А может быть либо первой, либо в начале блоке Б: МАБУБУ… Т.е. нет ни БА, ни МАМ.

Во-вторых, для разных милых неплохих слов получаются разные парные им слова. Внутри блоков М и Б замена однозначна, а начало блока Б в преобразованном слове определяется по сочетанию МА (если блок Б состоял только из одной буквы Б, то она была последней буквой в исходном слове, а наше преобразование не изменяет буквы Б и М, стоящие на последнем месте).

Теперь разберёмся, в каких ситуациях парные слова оказались плохими.

Если в исходном слове был слог МА, то он превратился в БУ, и слово стало плохим. Если слога МА не было, то был слог БА (т.к. слово милое). Если блок Б состоял хотя бы из четырёх букв, то БАБА… перешло в МАБУ…, и слово плохое. Т.е. имеем только три милых слова, которые не стали плохими: УМУМУМУМУБА, АМУМУМУМУБА, МУМУМУМУБАБ.

А плохих немилых слов, которые не получились таким образом, больше трёх. Например: АБУМАБУМАБУМУ, УБУМАБУМАБУМУ, МАБУМАБУМАБУМ, МАБУМАБУМАБУБ.

Возьмём первые три в пару к милым неплохим словам УМУМУМУМУБА, АМУМУМУМУБА, МУМУМУМУБАБ.

Т.е. каждому милому неплохому мы нашли пару из плохого немилого, но при этом у нас еще остались плохие немилые слова без пары.