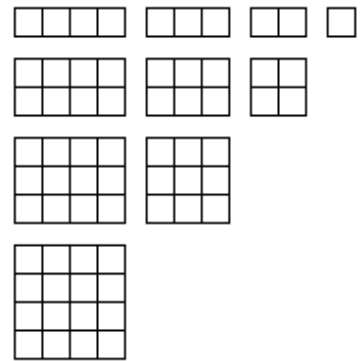


**XIX олимпиада Юношеской математической школы.**

**Заочный тур**

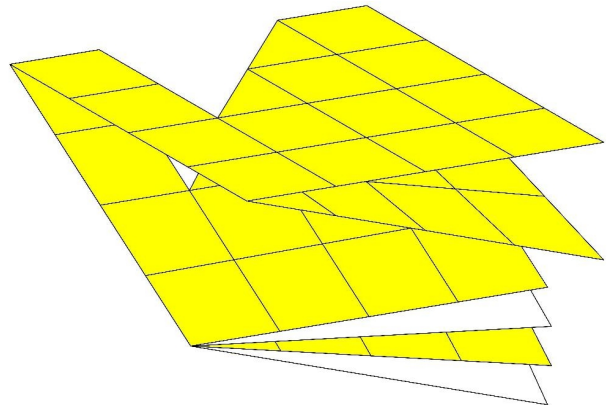
**Задания для 4 и 5 классов**

1. У Гоши в саду распустились ровно 100 цветов: красные и жёлтые розы, жёлтые подсолнухи, красные и белые хризантемы. Гордый Гоша пересчитал свои цветы и обнаружил, что более 30 из них белого цвета, более 50 — розы, более 25 — подсолнухи и более 15 — хризантемы. Не ошибся ли он?
2. Марина записала дату своего рождения (число, месяц и год). Потом она умножила число на номер месяца и получила 372. Когда у неё день рождения? Найдите все варианты и докажете, что других нет.
3. В галактике Кин-Дза-Дза живут пацаки и чатлане. У них принято говорить правду, если в помещении присутствуют представители обеих рас, и врать среди своих. Собрались в комнате трое жителей галактики. Первый сказал: «Я пацак», и вышел из помещения. Второй сказал: «А я чатланин». Определите, кем является каждый из них. Не забудьте объяснить, почему другие варианты невозможны.



4. Коле и Толе подарили на день рождения по набору из десяти прямоугольников (см. рисунок). Коля потерял один из них, а из остальных девяти сумел составить квадрат. Толя потерял другой прямоугольник, но из остальных девяти тоже сумел составить квадрат. Нарисуйте, как могли выглядеть квадраты, составленные Колей и Толей. Достаточно привести по одному примеру.

5. Прямоугольный лист цветной клетчатой бумаги сложили и вырезали из него часть так, как показано на рисунке. Затем этот лист развернули. Нарисуйте развернутый лист и покажите на рисунке сделанные вырезы.



6. На доске написано число 12345. Разрешается прибавить к имеющемуся числу любую его ненулевую цифру. Андрюша утверждает, что сможет десять тысяч раз проделать такую операцию, и после каждого применения этой операции результат будет нечётным. Прав ли он?
7. Имеется 31 гири: 16 гирь весом в 1 пуд, 8 гирь по 2 пуда, 4 гири по 4 пуда, две 8-пудовых и одна 16-пудовая. Все гири выглядят одинаково, но для подъёма гири нужны хотя бы столько человек, сколько пудов она весит. При этом на каждую попытку подъёма гири (удачную или неудачную) тратится одна минута. Бригада из 16 рабочих должна поднять каждую из этих гирь.
  - а) Объясните, как бригаде справиться с заданием за 9 минут.
  - б) Сумеет ли бригада справиться за 9 минут, если один из рабочих — новичок, и его можно привлекать не более чем два раза?

*Даже если вы решили только один из пунктов (а) и (б), есть смысл записать решение.*

## Решения

**Задача 1.** Заметим, что все белые цветы — хризантемы, поэтому в саду больше 30 хризантем. А ещё там больше 50 роз и больше 25 подсолнухов, итого больше 105 цветов. Это противоречит тому, что цветов ровно 100. Значит, Гоша ошибся.

**Задача 2.** Поскольку  $31 \cdot 12 = 372$ , то Марина могла родиться 31 декабря. Заметим, что 372 получается, только если номер числа и номер месяца максимально возможные. Значит, в остальных случаях получится меньше 372. Ответ: 31 декабря.

**Задача 3.** 1) Допустим, что первый — чатланин. Тогда он соврал, а значит, вначале в комнате находились только чатлани. Но тогда и второй должен был соврать третьему (поскольку они одной расы), а значит, второй не мог сказать, что он чатланин. Противоречие. Значит, на самом деле первый — пацак.

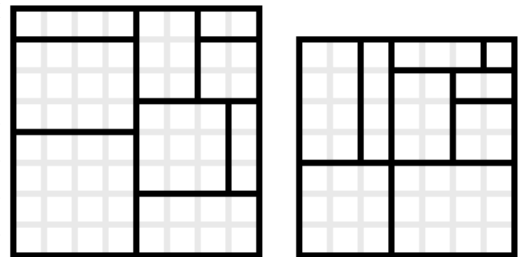
2) Если второй — чатланин, то получается, что он сказал правду. Это значит, что третий был пацачком. Этот вариант подходит: в этом случае и первый, и второй должны сказать правду, что они и сделали.

3) Если второй — пацак, то получается, что он солгал. Это значит, что третий тоже пацак. Но в таком случае в комнате с самого начала были три пацака, и первый должен был соврать, а он сказал правду. Противоречие.

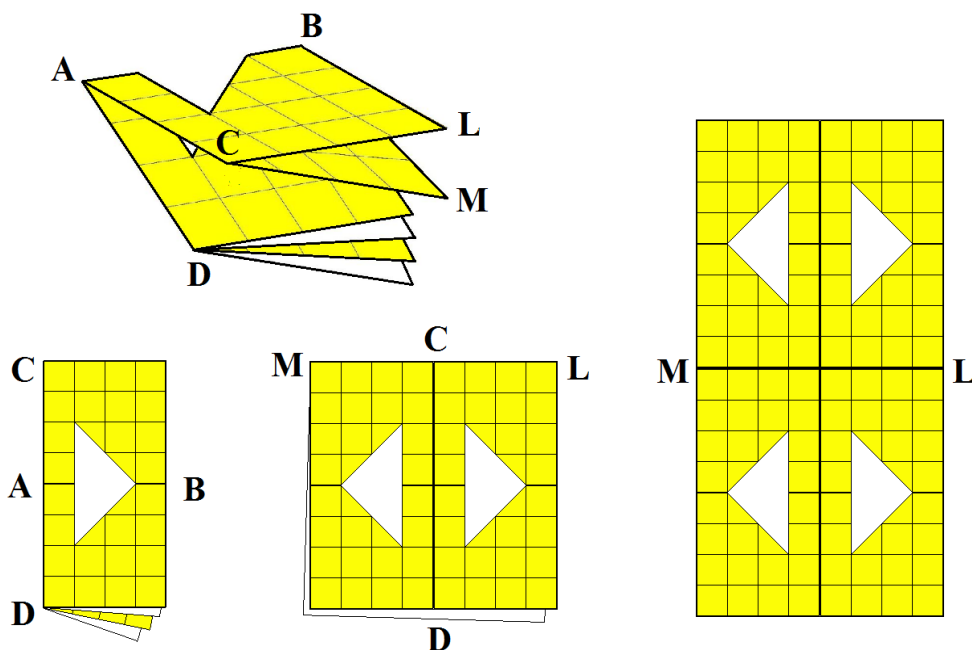
Ответ: первый — пацак, второй — чатланин, третий — пацак.

**Задача 4.** Примеры приведены на картинке.

Для решения задачи полезно определить, какие детали потерялись. Для этого надо заметить, что суммарная площадь десяти деталей — 65 клеток. Если потерять самую маленькую деталь, то останется 64 клетки, из них можно составить квадрат  $8 \times 8$ . Если же потерять самую большую деталь, то останется 49 клеток, из которых можно собрать квадрат  $7 \times 7$ . Если потерять какую-нибудь другую деталь, то собрать квадрат не удастся.



**Задача 5.** По рисунку видно, что последний сгиб был проделан вдоль линии АВ, предпоследний — вдоль линии CD (на которой лежит точка А), и самый первый — вдоль линии ML (на которой лежит точка С). Далее показано, что получается при последовательном разгибании листа. Последняя картинка и есть ответ.



**Задача 6.** Андрюша ошибается. Докажем это.

Заметим, что на каждом шаге мы прибавляем число от 1 до 9. В какой-то момент (и это случится раньше, чем проделаны 10000 операций) число попадёт в диапазон от 13000 до 13009 («проскочить» этот диапазон невозможно, поскольку его длина 10, а величина каждого шага меньше 10).

Теперь возможно одно из двух. Если Андрюшино число, попавшее в этот диапазон, чётное, то он уже не справился с задачей. Если же оно нечётное, то все ненулевые цифры этого числа нечётны! Поэтому к нему придётся прибавить нечётную цифру, и после этого оно станет чётным.

**Задача 7а.** Покажем, как это происходит.

В некоторые минуты часть рабочих отдыхает, мы не будем специально это указывать.

Ми- нута	Что происходит	Результат
1	Рабочие по одному пытаются поднять гири №1-16	Все гири в 1 пуд подняты; осталось 15 гирь
2	Рабочие по одному пытаются поднять гири №17-31	
3	Рабочие делятся на 8 пар и пытаются поднять 8 из оставшихся 15 гирь	Все гири в 2 пуда подняты; осталось 7 гирь
4	7 пар рабочих пытаются поднять ещё 7 из оставшихся 15 гирь	
5	Рабочие делятся на 4 четвёрки и пытаются поднять 4 из оставшихся 7 гирь	Все гири в 4 пуда подняты; осталось 3 гири
6	3 четвёрки рабочих пытаются поднять ещё 3 из оставшихся 7 гирь	
7	Рабочие делятся на две восьмёрки и пытаются поднять две из трёх оставшихся гирь	Все гири в 8 пудов подняты; осталась только одна 16-пудовая гиря
8	Восемь рабочих пытаются поднять третью гирю	
9	Рабочие все вместе поднимают гирю в 16 пудов	Все гири подняты

**Задача 7б.** Да, рабочие могут уложиться в 9 минут и в этом случае.

Будем всё время (кроме двух последних действий) использовать только 15 рабочих, пытаюсь при этом действовать по тому же плану, что и в пункте (а).

В первую минуту 15 рабочих пытаются поднять гири с 1-й по 15-ю, а во вторую минуту — гири с 16-й по 30-ю. В результате возможны два случая:

а) если 31-я гиря весит 1 пуд, то останутся 15 «тяжёлых» гирь (весащих 2 и более пудов), которые мы обозначим 1', 2', ..., 15', а также 1-пудовая гиря 31;

б) если 31-я гиря весит больше одного пуда, то все 16 лёгких гирь были успешно подняты за первые две минуты, и остались только 15 тяжёлых (также обозначим их 1', 2', ..., 15').

После четвёртой и шестой минуты будут возникать аналогичные варианты. Всякий раз, если осталась одна более лёгкая гиря, она поднимается в следующую минуту.

Продолжим в виде таблицы.

Ми- нута	Что происходит	Результат
1	15 рабочих по одному пытаются поднять гири №1-15	Среди гирь №1-30 подняты все гири весом в 1 пуд. Остались 15 гирь весом более 1 пуда (обозначим их 1', 2', ..., 15'), а также, возможно, 1-пудовая гиря 31.
2	15 рабочих по одному пытаются поднять гири №16-30	
3	14 рабочих, разбившись на 7 пар, пытаются поднять гири № 1'-7'; а 15-й рабочий, если это необходимо, поднимает гирю 31.	Среди гирь №1'-14' подняты все гири весом в 2 пуда. Остались 7 гирь весом более 2 пудов (обозначим их 1'', 2'', ..., 7''), а также, возможно, 2-пудовая гиря 15'.
4	7 пар рабочих пытаются поднять гири №8'-14'.	
5	12 рабочих, разбившись на 3 четвёрки, пытаются поднять гири 1'', 2'', 3''; а 13-й и 14-й рабочие, если это необходимо, поднимает гирю 15'.	Среди гирь №1''-7'' подняты все гири весом в 2 пуда. Остались 3 гири весом более 4 пудов (обозначим их 1*, 2*, 3*), а также, возможно, 4-пудовая гиря 7''.
6	3 четвёрки рабочих пытаются поднять гири 4'', 5'', 6''.	
7	Восемь рабочих пытаются поднять гирю 1*. Ещё четверо, если необходимо, поднимают гирю 7''.	Все гири в 8 и менее пудов подняты; осталась только одна 16-пудовая гиря
8	Восемь рабочих пытаются поднять гирю 2*, а другие восемь (включая новичка) — гирю 3*.	
9	Рабочие все вместе поднимают гирю в 16 пудов	Все гири подняты

Как видим, с первой по седьмую минуты используются не более 15 рабочих, то есть новичок привлекается только дважды.

#### Количество баллов, начисляемых за полное решение каждой задачи

1	2	3	4	5	6	7	Итого
3	3	5	4	5	5	4+4	33