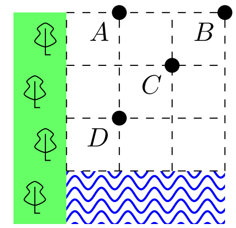
4 класс

1. В отмеченных точках (см. рисунок) находятся 4 норы. В них живут хоббиты: Фродо, Сэм, Мерри и Пиппин. Нора Фродо ближе к норе Мерри, чем к норе Пиппина. А нора Сэма находится ближе к реке, чем нора Мерри, но дальше от лесополосы, чем нора Пиппина. Кто где живёт? Ответ обоснуйте.



Решение. Пусть A, B, C, D — норы, отмеченные в порядке «слева направо и сверху вниз». Нора Сэма — C (она не самая далёкая от реки, т.е. не A и не B, но и не самая близкая к лесополосе, т.е. не D). Из условий следует, что Фродо живёт не в A (иначе Мерри и Пиппин будут на одинаковом расстоянии), Мерри — не в D, Пиппин — не в B (это следует из расположения норы Сэма). Если Фродо живёт в D, то Пиппин — в A, Мерри — в B, и первое условие не выполняется. Значит, Фродо живёт в B, Мерри — в A, а Пиппин в D. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Верный ответ — 2 балла.
Верный ответ, но пропуск нескольких высказываний (например, "Сэм в норе посередине, т. к. Он ближе к реке но без уточнения возможности Сэма находиться в норе, ближайшей к реке) — 5 баллов.
Верный ответ и небольшое количество логически верных утверждений, но пропуск значительной части нужных переходов и случаев — 3 балла.
Обоснование того, где живёт Сэм — 2 балла.
Верное рассуждение, кто где не может находиться, после объяснения, где Сэм — 2 балла.
Неполный перебор случаев — не более 3 баллов.

2. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать одну или несколько монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «три», если ему дали всего две монеты. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

Решение. Да, есть много способов сделать это. Например, мы можем 100 раз приносить эксперту по одной монете. Если не все его ответы одинаковые, то фальшивые монеты те, на которые барон назвал большее число. Если же все ответы одинаковы (пусть они будут x), тогда либо все монеты настоящие, либо все фальшивые. В этом случае следующим ходом дадим барону сразу все монеты. Если он снова назовёт x, значит, все монеты были настоящими, а барон преувеличивал каждый раз на x. Если же все монеты фальшивые, то он назовёт число $99 + x$ (потому что он преувеличивал всегда на $x - 1$). □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
За верное решение, где вместо переменной используется ("для примера") конкретное число (размер преувеличения) без оборотов вида «не умаляя общности» и подобных ему по смыслу — 6 баллов.
За отсутствие объяснения, почему стратегия работает — 6 баллов.
За разбор решения с поочередным разбором всех монет, но без учета варианта, в котором все взятые монеты одинаковы — 5 баллов.

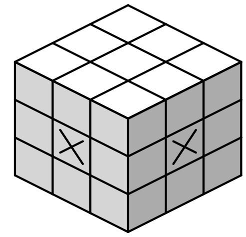
3. 31 машина одновременно стартовала из одной точки на круговой трассе: первая машина — со скоростью 61 км/ч, вторая — 62 км/ч, и т. д. (31-я — 91 км/ч). Трасса узкая, и если одна машина на круг обгоняет другую, то они врезаются друг в друга, обе вылетают с трассы и выбывают из гонки. В конце концов осталась одна машина. С какой скоростью она едет?

Решение. Сперва самая быстрая машина врезается в самую медленную, потом — вторая по скорости врезается в предпоследнюю, и т.д. В итоге останется средняя по скорости машина, т. е. 16-я. Она едет со скоростью 76 км/ч. □

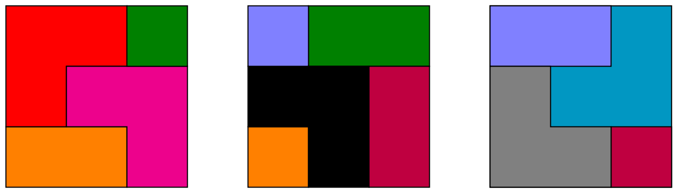
Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Решение, правильно описывающее в целом последовательность столкновений, но с неверным ответом при счете — 6 баллов.

Правильный ответ + выписаны и зачёркнуты машины, но не сказано по какому принципу (в каком порядке происходило выбывание) — 4 балла.

4. Из куба $3\times3\times3$ вырезали тоннель из трёх кубиков, соединяющий центральные клетки двух соседних граней (на рисунке они отмечены крестиками). Разрежьте остальное на фигурки такой же формы, как и тоннель (тоже из трёх кубиков).



Решение. Покажем послойно как сложить требуемую конструкцию (разные фигурки отмечены разными цветами, тоннель — чёрным):



□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Ответ: 6 или 24. Решение: Назовём Васей того из друзей, чьё произведение равно сумме остальных. Ясно, что Вася перемножал больше чисел, чем остальные. Если бы он перемножил хотя бы 5 чисел, то его произведение оказалось хотя бы в 5 раз больше, чем произведение любого из оставшихся друзей. Но его произведение — сумма произведений друзей, которых четверо. Значит, в 5 раз (а тем более в 6, 7 и т. д.) больше оно быть не может. Выходит, Вася перемножил не более 4 чисел. Сумма чисел у четырех Васиных друзей никак не меньше четырёх, а значит и Васино число не меньше четырёх. Выходит, одно или два числа Вася не мог перемножить, а для случаев трёх и четырёх множителей есть примеры:

$$1+1+1\cdot2+1\cdot2=1\cdot2\cdot3, \qquad 1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3=1\cdot2\cdot3\cdot4.$$

□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
Доказано, что $n\leqslant4$ — 4 балла.
Если в ответе приведены оба варианта, с тремя и с четырьмя множителями — 6 баллов
Правильный ответ + неаккуратное рассуждение про «произведение 120 получить нельзя» — 1 балл
Просто правильный ответ с примером — 1 балл.

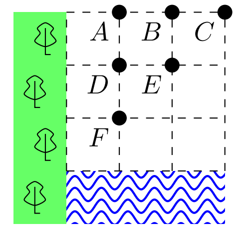
6. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Стулья гномов пронумерованы по порядку от 1 до 8. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. Могут ли все алмазы оказаться у одного гнома?

Решение. Заметим, что гномы с чётными номерами стульев всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то в любой момент времени у гномов с чётными номерами будет столько же алмазов в сумме, сколько у гномов с нечётными номерами. А значит, алмазы у одного гнома собраться не смогут. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
За фразу «четные гномы всегда отдают нечётным и наоборот» — 2 балла
За фразу «сумма алмазов не меняется у нечётных и чётных» без пояснения того, почему из этого следует ответ на задачу — 6 баллов.

5 класс

1. В отмеченных точках (см. рисунок) находятся 6 нор. В четырёх норах живут хоббиты: Фродо, Сэм, Мерри и Пиппин. Ещё две норы пустуют, и обе расположены к норе Сэма ближе, чем нора Фродо. А нора Фродо находится ближе к реке, чем нора Мерри, но дальше от лесополосы, чем нора Пиппина. Кто где живёт? Ответ обоснуйте.



Решение. Пусть A, B, C, D, E, F — норы, отмеченные в порядке «слева направо и сверху вниз». Нора Фродо может быть — D, E, F из условия, что она ближе к реке, чем нора Мерри, и — B, C, E из условия, что дальше от леса, чем нора Пиппина. Значит Фродо живёт в норе E. Сэм тогда может жить в — A, B или D, C или F. Но B или D, C или F отпадает, поскольку будет нарушаться условия с пустыми норами. Значит Сэм живёт в A , Пиппин — в F и Мэри — в C. □

Критерии. Полное решение — 3 балла.
1 балл — верно определена нора Фродо.
2 балла — верный ответ.

2. 31 машина одновременно стартовала из одной точки на круговой трассе: первая машина — со скоростью 61 км/ч, вторая — 62 км/ч, и т. д. (31-я — 91 км/ч). Трасса узкая, и если одна машина на круг обгоняет другую, то они врезаются друг в друга, обе вылетают с трассы и выбывают из гонки. В конце концов осталась одна машина. С какой скоростью она едет?

Решение. Сперва самая быстрая машина врезается в самую медленную, потом — вторая по скорости врезается в предпоследнюю, и т. д. В итоге останется средняя по скорости машина, т. е. 16-я. Она едет со скоростью 76 км/ч. □

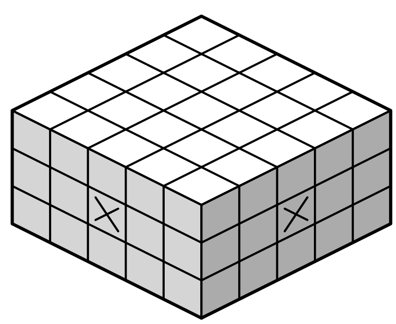
Критерии. Полное решение — 3 балла.
1 балл если написан только ответ 76.
За правильные размышления, но ответ 75 или 77 снимается 1 балл.

3. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

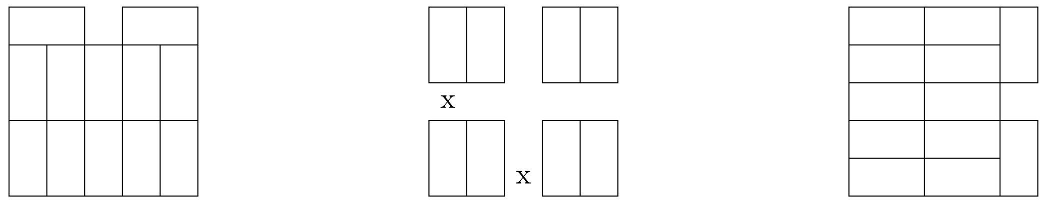
Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные 10 монет, а потом те же самые 10 и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом за два вопроса мы можем проверить на фальшивость любую монету. □

Критерии. Полное решение — 4 балла.
За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За решение, с игнорированием органичения 10 — 20 монет — максимум 3 балла

4. Исаак де Казобон хочет удалить из параллелепипеда $5 \times 5 \times 3$ несколько кубиков так, чтобы появилась пещера, выходящая на поверхность только в двух местах: центрах соседних боковых граней (на рисунке они отмечены крестиками). Как это сделать так, чтобы оставшуюся часть параллелепипеда можно было бы сложить из параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$?



Решение. Вырежем из каждого слоя горизонтальные параллелепипеды, как показано на рисунке. После этого заткнём вертикальными параллелепипедами дырки в 1 и 3 слоях. В центре как раз останется нужная пещера.



слой 1 слой 2 слой 3

$\square$

Критерии. Полное решение — 4 балла.

5. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Назовём Васей того из друзей, чьё произведение равно сумме остальных. Ясно, что Вася перемножал больше чисел, чем остальные. Если бы он перемножил хотя бы 5 чисел, его произведение оказалось хотя бы в 5 раз больше, чем произведение любого из оставшихся друзей. Но его произведение — сумма произведений друзей, которых четверо. Значит, в 5 раз (тем боле в 6, 7 и т. д.) больше оно быть не может. Выходит, Вася перемножил не более 4 чисел. У каждого из Васиных друзей произведение хотя бы 1, значит, у Васи хотя бы 4. Выходит, одно или два числа Вася не мог перемножить, а для трёх и четырёх есть примеры:

$$1+1+1\cdot 2+1\cdot 2=1\cdot 2\cdot 3, \qquad 1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4. \tag{1}$$

$\square$

Критерии. Полное решение — 5 баллов.
2 балла — доказательство того, что Вася перемножил не более 4 чисел;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил 4 числа;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил 3 числа;
1 балл — разбор случая, когда Вася перемножил меньше 3 чисел;
Вышеперечисленные баллы суммируются.

6. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Стулья гномов пронумерованы по порядку от 1 до 8. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. В некоторый момент все алмазы собрались у трёх гномов. У одного из гномов оказалось 7 алмазов. Сколько у каждого из других?

Решение. Заметим, что гномы с чётными номерами всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то все алмазы гномов с чётным номерами перейдут к гномам с нечётными номерами и наоборот. То есть у гномов с чётными номерами суммарно всегда будет 12 алмазов, и у гномов с нечётными — тоже. Значит, у гнома с 7 алмазами есть напарник с таким же по чётности номером и у него будет 5 алмазов. Тогда у оставшегося третьего может быть только 12 алмазов. $\square$

Критерии. Полное решение — 6 баллов.
1 балл — просто верный ответ;
2 балла — решение примером.

7. Можно ли в равенстве БАРАНКА + БАРАБАН + КАРАБАС = ПАРАЗИТ заменить все буквы цифрами (одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы разными цифрами), чтобы оно было верным?

Решение. Заметим, что $3\cdot \text{АРА}+x=\text{АРА}+1000\cdot y$, где x и y — возможные значения переходов разрядов, каждое от 0 до 2. Если же упростить это выражение, то получается, что $2*(\text{АРА})+x$ делится на 1000. Посмотрим на возможные значения x:

- при $x=0$ выходит, что АРА $=500$ или 0;
- при $x=1$ решений нет в силу чётности;

- при $x = 2$ выходит, что АРА $= 499$ или 999.

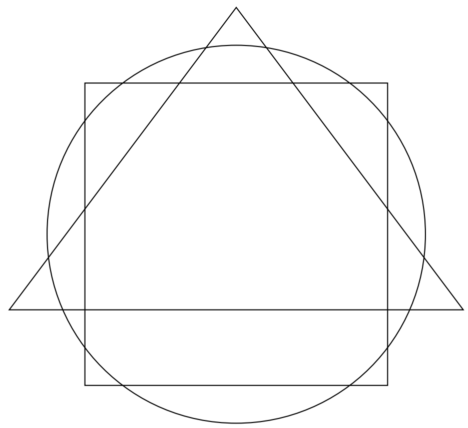
Но так как А и Р разные цифры, решений у этого ребуса не будет. $\square$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.
1 балл — рассмотрены только значения 0 и 5 для A и P (то есть без учёта перехода через разряд).

6 класс

1. Нарисуйте на листе бумаги окружность, квадрат и треугольник так, чтобы после разрезов по нарисованным линиям лист распался на 22 части.

Решение.



Квадрат разрезан на 8 частей, сверху, справа и слева от квадрата по 4 части, снизу одна и ещё одна большая часть вокруг — всего 22. Возможны другие варианты расположения фигур. □

Критерии. Приведён правильный пример (возможно отличающийся от указанного) — 2 балла. Во всех остальных случаях — 0 баллов.

2. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые?

Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные 10 монет, а потом те же самые 10 и одну другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом за два вопроса мы можем проверить на фальшивость любую монету. □

Критерии. Полное решение — 4 балла. За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За решение с игнорированием органичения от 10 до 20 монет максимум 3 балла.

3. Упрямый робот «Инвертор» стоит на бесконечной плоскости и смотрит на восток. Этот робот понимает всего две команды: `ШАГ` и `НАЛЕВО`. Когда робот видит команду `ШАГ`, он передвигается вперёд ровно на 1 метр. Когда робот видит команду `НАЛЕВО`, он, оставаясь на месте, поворачивается налево ровно на 90°. Робот называется упрямым потому, что когда в него вводят программу (последовательность команд), то он сначала выполняет всю программу, а затем выполняет эту же программу, инвертируя смысл команд: видя команду `ШАГ`, он выполняет команду `НАЛЕВО` и наоборот. Используя команду `ШАГ` **ровно два** раза и команду `НАЛЕВО` сколько угодно раз, составьте для этого робота такую программу, чтобы после её упрямого выполнения он вернулся в исходную точку и смотрел на восток.

Решение. Пример программы для упрямого робота: `ННННШШНН`. Есть и много других примеров. □

Критерии. Приведён правильный алгоритм — 4 балла. Во всех остальных случаях — 0 баллов.

4. Каждый из пяти друзей перемножил несколько последовательных чисел, начиная с 1. Оказалось, что одно из произведений равно сумме четырёх других. Найдите все возможные значения этого произведения и покажите, что других значений нет.

Решение. Произведение всех последовательных чисел с 1 и до x, называется факториалом числа x и обозначается $x!$. Таким образом, нам нужно решить уравнение $x! = a! + b! + c! + d!$. Пусть числа a, b, c, d упорядочены по возрастанию. Тогда $x > d$, т.е. $x! \geqslant x \cdot d!$. Но мы знаем, что $x! \leqslant 4d!$, потому что $a! \leqslant d!$, $b! \leqslant d!$ и $c! \leqslant d!$. Отсюда $x \leqslant 4$.

Если $x = 4$, то подходят значения $a = b = c = d = 3$ (и это единственное решение).

Если $x = 3$, то единственный вариант — $3! = 1! + 1! + 2! + 2!$. Этот вариант не подходит, потому что каждый перемножал несколько (т. е. более одного) чисел.

Ясно, что $x \leqslant 2$ быть не может.

Таким образом, единственный ответ — 24. □

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

2 балла — доказательство оценки $x \leqslant 4$;

1 балл — разбор случая $x = 4$;

1 балл — разбор случая $x = 3$;

1 балл — разбор случая $x = 1, 2$;

Вышеперечисленные баллы суммируются.

1 балл — Правильный ответ без какого-либо решения.

5. За круглым столом сидят 8 гномов, у каждого из которых есть по три алмаза. Каждую минуту гномы одновременно делают следующее: делят все свои алмазы на две кучки (возможно, одна из кучек или обе кучки пустые), затем одну кучку отдают левому соседу, а другую — правому. В некоторый момент все алмазы собрались у трёх гномов. У одного из них семь алмазов. Сколько у двух других?

Решение. Пронумеруем гномов по порядку. Заметим, что гномы с чётными номерами всегда делятся с гномами с нечётными номерами, и наоборот. Поскольку все дележи происходят одновременно, то все алмазы гномов с чётным номерами перейдут к гномам с нечётными номерами и наоборот. То есть у гномов с чётными номерами суммарно всегда будет 12 алмазов, и у гномов с нечётными — тоже. Значит, у гнома с 7 алмазами есть напарник с таким же по чётности номером и у него будет 5 алмазов. Тогда у оставшегося третьего может быть только 12 алмазов. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

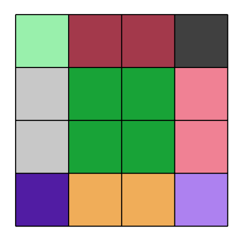
Из них:

Доказательство того, что у чётных гномов (и у нечётных) суммарно всегда будет 12 алмазов — 3 балла.

Доказательство того, что найдётся гном с 5 алмазами — 1 балл.

Доказательство того, что найдётся гном с 12 алмазами — 1 балл.

6. В квадрате 4×4 клетки раскрашены в несколько цветов так, что в любом прямоугольничке 1×3 есть две клетки одного цвета. Какое максимальное количество цветов может быть использовано?



Решение. Максимум 9 цветов. Пример см. на картинке. Докажем, что больше нельзя. Любой ряд (строка или столбец) дает максимум три цвета, значит, первая строка + первый столбец дадут максимум $3 + 3 - 1 = 5$ цветов.

Докажем, что оставшийся квадрат 3×3 даст максимум 4 цвета. Действительно, допустим, мы использовали в нём 5 цветов. Так как в одной строке не более двух различных цветов, то найдутся две строки, в которых использовано 4 разных цвета по 2 цвета в каждой строке. Тогда в оставшейся строке будет хотя бы одна клетка пятого цвета. В столбике, содержащем эту клетку, все клетки будут разного цвета. Противоречие.

Итого на всей доске не более $4 + 5 = 9$ различных цветов. □

Критерии. Полное решение (есть оценка и есть пример) — 7 баллов.

Из них:

Есть пример для 9 цветов — 2 балла.

Полное доказательство оценки — 5 баллов, из них: 2 балла за одну строку + один столбец и 3 балла за доказательство того, что квадрат 3×3 даст максимум 4 цвета.

7. В ряд стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. В этом ряду имеется ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдётся группа из 70 детей подряд, в которой мальчиков и девочек также поровну.

Решение. Зациклим детей в круг. Посмотрим теперь на все возможные группы из 30 подряд стоящих детей (будем называть такие группы *отрядами*). Достаточно доказать, что хотя бы в двух из них поровну мальчиков и девочек. Действительно, тогда при размыкании цикла обратно один из этих двух отрядов по условию должен разорваться, значит, между частями, на которые такой отряд разорвался, в ряду стоит 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну.

Теперь покажем, что в цикле есть хотя бы два отряда, среди которых поровну мальчиков и девочек. Из условия ясно, что есть отряд, где девочек и мальчиков не поровну. Причём найдётся как отряд, где больше мальчиков (то есть мальчиков больше 15), так и отряд, где больше девочек (то есть мальчиков меньше 15). Действительно, если, скажем, в каждом отряде мальчиков не больше, чем девочек, то при сложении количества мальчиков и девочек во всех отрядах, получится, что тогда утридцатиренное число мальчиков меньше, чем утридцатиренное число девочек, что противоречит условию (каждый из детей посчитан входит ровно в 30 отрядов, то есть посчитан ровно 30 раз).

Заметим теперь, что при переходе от отряда к соседнему с ним количество мальчиков либо не меняется, либо меняется на 1. Тогда если мы будем смещаться от отряда, где мальчиков больше 15, к отряду, где мальчиков меньше 15, что по часовой стрелке, что против часовой стрелки, нам каждый раз обязательно встретится отряд, где мальчиков ровно 15, то есть мальчиков и девочек поровну. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Из них:

Озвучена идея замкнуть детей в круг — 1 балл.

Доказано, что если в круге найдётся второй отряд с равным числом мальчиков и девочек, то один из отрядов разомкнётся и даст 70 детей с равным числом мальчиков и девочек — 2 балла.

Доказано, что найдётся второй отряд с равным числом мальчиков и девочек — 3 балла.

7 класс

1. Министерство Правды заявило, что за январь занятость населения Океании упала на 15% от предыдущего уровня, а безработица выросла на 10% от предыдущего уровня. Какова теперь безработица в Океании, согласно заявлению Министерства? (Занятость — доля трудоспособного населения, имеющего работу, а безработица — не имеющего.)

Решение. Пусть безработица была x процентов, а занятость тогда $100 - x$ процентов. По заявлению из условия эти доли превратились в $1.1 \cdot x$ и $0.85 \cdot (100 - x)$ соответственно, ну и всё ещё дают в сумме 100 процентов. Тогда получаем уравнение:

$$1.1 \cdot x + 0.85 \cdot (100 - x) = 100,$$

решая которое, находим $x = 60$. Значит, теперь безработица 66%. □

Критерии. Задача оценивается в 3 балла.
Правильно составленное уравнение – 1 балл.
Не доведено до ответа, но посчитано то, после чего надо произвести одно действие – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

2. Сумма факториалов трёх подряд идущих натуральных чисел делится на 61. Докажите, что последнее из чисел никак не меньше, чем 61. (Факториал числа n — это произведение всех чисел от 1 до n включительно.)

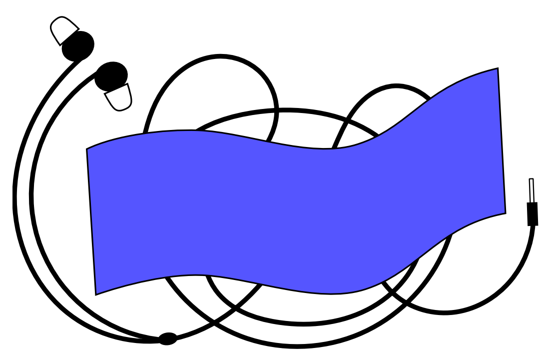
Решение. Пусть последнее из чисел — это k. Тогда сумма факториалов переписывается следующим образом:

$$(k-2)! + (k-1)! + k! = (k-2)! \cdot (1 + (k-1) + (k-1) \cdot k) = (k-2)! \cdot k^2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot k^2. \quad (2)$$

Раз 61 простое, то какое-то из чисел $1, 2, \ldots, k-2, k$ делится на 61. Тогда это число никак не меньше 61, ну и k тем более. □

Критерии. Задача оценивается в 4 балла.
Если решение опирается на простоту 61, но это не сказано — не более двух баллов.
Раскрыты скобочки – 0 баллов.

3. Таня запутала провод от наушников и сфотографировала узел, поверх которого положила атласную ленту (см. рисунок). Сколько существует вариантов соединения концов провода под лентой?



Решение. Из-под ленты торчит 5 отрезков провода (кроме концов с динамиками и штекером). Эти отрезки могут располагаться в любом порядке: это может быть реализовано 5! способами. Кроме того, каждый отрезок может быть ориентирован двумя способами (каждый из его концов может быть ближе к штекеру, а может — к динамикам), то есть ответ надо ещё 5 раз умножить на 2. Получаем $5! \cdot 2^5 = 3840$.

Критерии. Задача оценивается в 4 балла.
При недостаточно подробном пояснении — до -2 баллов

4. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые, обратившись к эксперту меньше 120 раз?

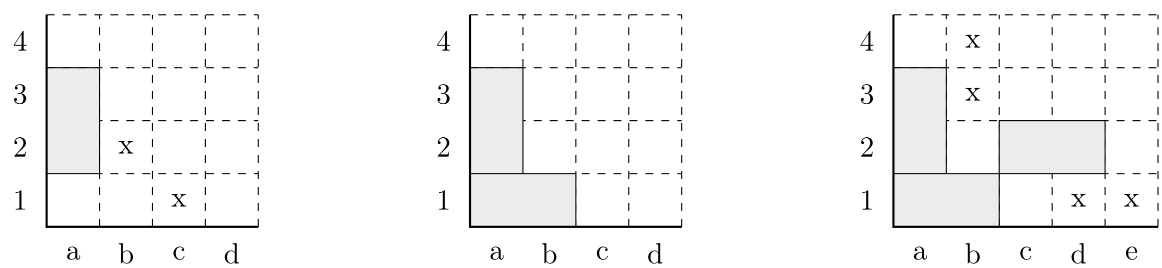
Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные X монет, а потом те же самые X и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая.

Таким образом, можно разбить монеты на группы из 10, и каждую группу проверять на фальшивость за 11 обращений: сначала отдавать 10 других монет, а затем добавлять по одной монете из проверяемой группы. Всего обращений будет $11 \cdot 10 = 110 < 120$. □

Критерии. Задача оценивается в 5 баллов.
Только ответ – 0 баллов.
Пояснено, как найти «погрешность» – 1 балл
Идея про добавление монетки к прошлому вопросу – 2 балла.
Указан верный алгоритм, но не показано, что действий меньше 120 – 4 балла.

5. Двое по очереди ставят на доску 2020×2020 неперекрывающиеся домино, закрывающие по две клетки. Задача второго — покрыть домино всю доску, задача первого — помешать ему. Кто может обеспечить себе выигрыш?

Решение. Победит первый. Для этого он может играть, например, так. Первым ходом он кладёт доминошку на клетки a2 и a3. Второй не хочет получить на поле ни доминошку b1-b2, ни доминошку b1-c1, они обе отрезают клетку a1. Клетки b2 и c1 он одновременно не может покрыть, значит, надо закрывать b1, но без немедленного поражения это можно сделать только ходом a1-b1.



Тогда первый отвечает, например, ходом c2-d2, и помешать отрезанию клетки b2 или c1 ходами b3-b4 лии d1-e1 соответственно второй уже не сможет. □

Критерии. Задача оценивается в 6 баллов.
Первый ход b2-b3 – 2 балла.
Решение верное, но не хватает разбора случаев — снимать до двух баллов.
За любой первый ход 2 балла (все решения ценны, если дети плохо придумали второй шаг, они не могли понять, что другое решение лучше)

6. В Лимонном царстве 2020 деревень. Некоторые пары деревень соединены напрямик мощёными дорогами. Сеть дорог устроена так, что для любых двух деревень есть ровно один способ переместиться из одной в другую, не проезжая дважды по одной дороге. Агент Апельсин хочет облететь как можно больше деревень на вертолёте. В целях конспирации он не будет посещать одну деревню дважды, и не будет посещать подряд деревни, соединенные дорогой напрямик. Сколько деревень ему гарантированно удастся облететь? Начать он может из любой деревни.

Решение. Все деревни облететь не удастся, если некоторая деревня соединена дорогами со всеми остальными (а других дорог и нет).

Зато можно облететь все деревни, кроме одной. Составим план полёта: первую деревню выберем случайно, а каждую следующую — случайным образом из тех, в которые можно вылететь из предыдущей по правилам. В какой-то момент нельзя будет добавить очередную деревню. Значит, среди оставшихся деревень (если они есть) только соединённые дорогой с последней из добавленных. Теперь если их больше одной, выкинем из плана последнюю деревню и добавим оставшиеся. Они не соединены дорогами друг с другом, так как иначе между соединёнными деревнями было бы два пути: напрямик и через выкинутую деревню. Короме того, более одной деревни не может быть соединено дорогой с деревней, предшествующей выкинутой (в противном случае между выкинутой и предшествующей ей было бы два пути). Значит, если их хотя бы две, их можно поставить в план облёта согласно правилам. Теперь осталось облететь деревни по плану. □

Критерии. Задача оценивается в 7 баллов.
Доказано, что все облететь нельзя — 2 балла.
Показано, как облететь все, кроме одной — 4 баллов.

Не хватает пояснений обхода, но решение верное — до -3 баллов.

7. Миша придумал два составных числа: a и b. На доску в левый столбец он выписал все собственные натуральные делители числа a, в правый столбец — все собственные натуральные делители числа b. Одинаковых чисел на доске не оказалось. Миша хочет, чтобы число $a + b$ не делилось ни на одну сумму двух чисел из разных столбцов. Докажите, что ему для этого достаточно стереть не более половины чисел из каждого столбца. (Делитель числа называется собственным, если он отличается от 1 и самого числа.)

Решение. Для каждого делителя c числа a есть делитель a/c. Если $c \neq a/c$, то вычекркнем из соответствуещего столбца наименьшее из них. Поскольку из каждой пары вида $c, a/c$ вычеркнуто не более одного числа, то всего вычеркнуто не более половины чисел в столбце. Аналогичную операцию произведем со столбцом числа b.

Предположим теперь, что в левом столбце осталось число c, в правом — число d, и $a + b$ делится на $c + d$. Отметим, что c и d взамино просты, ибо любой их общий делитель, больший 1, изначально оказался бы в обоих столбцах. Положим $x = a/c$, а $y = b/d$. Отметим, что x и y — собственные делители a и b. Таким образом, $a + b = xc + yd$.

Раз $xc + yd$ делится на $c + d$, то $xc + yd - x(c + d)$ тоже делится на $c + d$. Итого $d(y - x) \vdots (c + d)$. Поскольку числа d и $c + d$ взаимно просты, то $(y - x) \vdots (c + d)$, но $|y - x| < y + x \leqslant c + d$, притом $y \neq x$, так как известно, что среди делителей a и b нет равных. Выходит, $a + b$ не может делиться на $c + d$.

$\square$

Критерии. Задача оценивается в 9 баллов.
Идея отсеять все маленькие делители — 3 балла.

8 класс

1. Министерство Правды заявило, что за январь занятость населения Океании упала на 15% от предыдущего уровня, а безработица выросла на 10% от предыдущего уровня. Какова теперь безработица в Океании, согласно заявлению Министерства? (Занятость — доля трудоспособного населения, имеющего работу, а безработица — не имеющего.)

Решение. Пусть безработица в начале января составляла x процентов, значит, занятость составляла $100-x$ процентов. Новые значения, согласно условию задачи, это $1.1x$ и $0.85(100-x)$ процентов соответственно. В сумме эти числа должны тоже давать 100. Получаем тогда уравнение:

$$1.1x + 0.85(100 - x) = 100, \tag{3}$$

решая которое, находим $x = 60$. Значит, ответ на задачу — это 66 процентов. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
В решении допущена арифметическая ошибка — 4 балла.
В качестве ответа указана безработица до января — 4 балла.
Допущены обе из указанных выше ошибок — не более 1 балла.

2. Ася поделила любимое число Васи на свое любимое число, Буся поделила любимое число Васи *на свое* любимое число. Затем обе девочки записали на доску делитель, неполное частное и остаток. Пять чисел на доске — это 2020, 2020, 2021, 2021, 2021. Можно ли однозначно определить шестое?

Решение. Нельзя. Рассмотрим два варианта, какими могли быть любимые числа ребят:

	Вася	Ася	Буся
Вариант 1	$2021 \cdot 2021 + 2020$	2021	2021
Вариант 2	$2021 \cdot 2021 + 2020 = 2022 \cdot 2020 + 2021$	2021	2022

Видно, что в первом случае шестым числом оказалось бы 2021, а во втором 2022. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
Найден пример соответствующий варианту 2 из решения — 4 балла.

3. У курфюрста Георга 100 монет, некоторые из них фальшивые (возможно, все или ни одной). Георг может показывать от 10 до 20 монет эксперту, и тот будет говорить, сколько из них фальшивых. Проблема в том, что единственный на всю округу эксперт — барон Мюнхгаузен, а он привирает: результат, названный бароном, всегда больше истинного на некоторое фиксированное (и неизвестное Георгу) натуральное число. Барона не смущает, что он может сказать, например, «тринадцать», если ему дали всего двенадцать монет. Сможет ли Георг гарантированно выяснить, какие монеты фальшивые, обратившись к эксперту меньше 120 раз?

Решение. Сможет. Отдадим на экспертизу случайные X монет, а потом те же самые X и 1 другую. Если барон оба раза скажет два одинаковых числа, значит добавленная монета — настоящая, иначе она фальшивая. Таким образом, можно разбить монеты на группы из 10, и каждую группу проверять на фальшивость за 11 обращений: сначала отдавать 10 других монет, а затем добавлять по одной монете из проверяемой группы. Всего обращений будет $11 \cdot 10 = 110 < 120$. □

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.
Решения в которых на проверку отдается по одной монете — 0 баллов.
Найдено число на которое привирает барон — 0 баллов.

4. В ряд стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. В этом ряду имеется ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдётся группа из 70 детей подряд, в которой мальчиков и девочек также поровну.

Решение. Зациклим детей в круг. Посмотрим теперь на все возможные группы из 30 подряд стоящих детей (будем называть такие группы *отрядами*). Достаточно доказать, что хотя бы в двух из них поровну мальчиков и девочек. Действительно, тогда при размыкании цикла обратно один из этих двух отрядов по условию должен разорваться, значит, между частями, на которые такой отряд разорвался, в ряду стоит 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну.

Теперь покажем, что в цикле есть хотя бы два отряда, среди которых поровну мальчиков и девочек. Из условия ясно, что есть отряд, где девочек и мальчиков не поровну. Причём найдётся как отряд, где больше мальчиков (то есть мальчиков больше 15), так и отряд, где больше девочек (то есть мальчиков меньше 15). Действительно, если, скажем, в каждом отряде мальчиков не больше, чем девочек, то при сложении количества мальчиков и девочек во всех отрядах, получится, что тогда утридцатиренное число мальчиков меньше, чем утридцатиренное число девочек, что противоречит условию (каждый из детей посчитан входит ровно в 30 отрядов, то есть посчитан ровно 30 раз).

Заметим теперь, что при переходе от отряда к соседнему с ним количество мальчиков либо не меняется, либо меняется на 1. Тогда если мы будем смещаться от отряда, где мальчиков больше 15, к отряду, где мальчиков меньше 15, что по часовой стрелке, что против часовой стрелки, нам каждый раз обязательно встретится отряд, где мальчиков ровно 15, то есть мальчиков и девочек поровну. □

Критерии.

Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC угол B прямой. На стороне BC отмечена середина M, а на гипотенузе нашлась такая точка K, что $AB = AK$ и $\angle BKM = 45°$. Кроме этого, на сторонах AB и AC нашлись такие точки N и L соответственно, что $BC = CL$ и $\angle BLN = 45°$. В каком отношении точка N делит сторону AB?

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда, так как $\triangle ABK$ по условию равнобедренный с основанием BK, $\angle ABK = \angle AKB = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Из-за прямоугольности $\triangle ABC$ угол ACB равен $90° - \alpha$, и, раз $\triangle CBL$ из условия равнобедренный с основанием BL, $\angle CBL = \angle CLB = 90° - 45° + \frac{\alpha}{2}$. Тогда получаем, что $\angle LBK = \angle ABK + \angle CBL - 90° = 45°$.

Из этого следует, что $LN \parallel BK$ и $BL \parallel KM$. Значит, во-первых, KM — средняя линия в равобедренном треугольнике CBL и тогда $CK = KL = CM = MB = \frac{1}{2}BC$. Во-вторых, $KBNL$ — трапеция, и она равнобедренная (так как $\angle NBK = \angle BKL$). Треугольник KAB по условию равнобедренный, а $KBNL$ равнобедренная трапеция, значит, $KL = BN$ и $AL = AN$.

Итого, имеем равенства:

$$BN = KL = KC = MC = BM$$

$$AN = AL.$$

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$(BM + MC)^2 + (BN + AN)^2 = (CK + KL + LA)^2.$$

Пользуясь известными равенствами, получаем

$$(BN + BN)^2 + (BN + AN)^2 = (BN + BN + AN)^2$$

$$4BN^2 + BN^2 + 2BN \cdot AN + AN^2 = 4BN^2 + 4BN \cdot AN + AN^2.$$

После сокращения соответствующих слагаемых

$$BN^2 = 2BN \cdot AN.$$

Длина отрезка BN не равна 0, например, потому что по условию $\angle BLN = 45°$, значит, на неё можно сократить полученое равенство:

$$BN = 2AN.$$

В итоге получаем ответ:

$$AN : BN = 1 : 2.$$

□

Критерии.

Внимание: картинка, на которой отмечено множество разных углов, не является доказательством чего-либо, поскольку по ней восстановить порядок вычисления углов не представляется возможным.

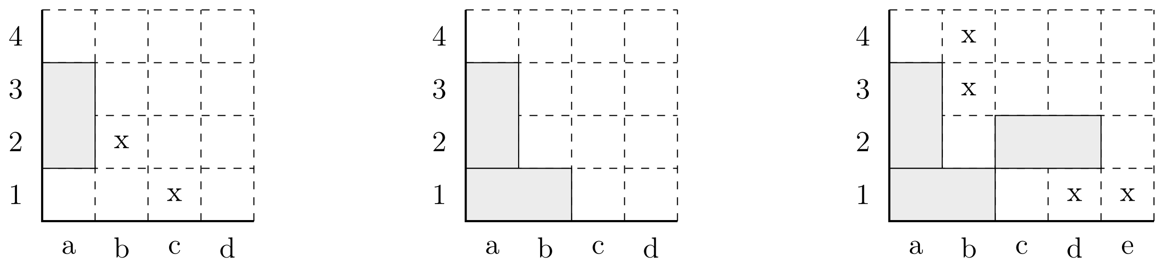
Полное решение — 7 баллов.

Доказано, что $LN \parallel BK$ и $BL \parallel KM$ — 4 балла.

6. Двое по очереди ставят на доску 2021×2021 неперекрывающиеся домино, закрывающие по две клетки. Задача второго — покрыть домино всю доску, кроме одной клетки, задача первого — помешать ему. Кто может обеспечить себе выигрыш?

Решение. Победит первый.

Сначала покажем, как отвоевать одну клетку. Для этого можно играть, например, так. Первым ходом первый игрок кладёт доминошку на клетки a2 и a3. Второй не хочет получить на поле ни доминошку b1-b2, ни доминошку b1-c1, они обе отрезают клетку a1. Клетки b2 и c1 он одновременно не может покрыть, значит, надо закрывать b1, но без немедленного поражения это можно сделать только ходом a1-b1.



Тогда первый отвечает, например, ходом c2-d2, и помешать отрезанию клетки b2 или c1 ходами b3-b4 лии d1-e1 соответственно второй уже не сможет.

Если же второй игрок в какой-то момент делает ход куда-то ещё, вне прямоугольника с углами a1 и e4, первый отрезает клетку, которую уже нельзя покрыть доминошками.

После того, как первый игрок отрезал клетку, второй игрок сделал не более одного хода вне прямоугольника с углами a1 и e4. Далее ход делает второй игрок, итого не более двух ходов вне прямоугольника с углами a1 и e4. Рассмотрим аналогичные прямоугольники для трёх оставшихся углов. Поскольку второй сделал не более двух ходов вне прямоугольника с углами a1 и e4, то есть хотя бы один прямоугольник в котором не было сделано ходов, тогда первый может аналогичным образом провести атаку на ещё один угол.

□

Критерии.

Полное решение — 7 баллов.

Указан первый ход, поставить домино на поля 2b-3b, но стратегия в целом не описана или является неверной — 2 балла.

Описана верная стратегия для игры в одном из углов, но отсутствуют объяснения, почему найдется еще один пустой угол — 5 баллов.

7. Миша придумал два составных числа: a и b. На доску в левый столбец он выписал все собственные натуральные делители числа a, в правый столбец — все собственные натуральные делители числа b. Одинаковых чисел на доске не оказалось. Миша хочет, чтобы число $a+b$ не делилось ни на одну сумму двух чисел из разных столбцов. Докажите, что ему для этого достаточно стереть не более половины чисел из каждого столбца. (Делитель числа называется собственным, если он отличается от 1 и самого числа.)

Решение. Для каждого делителя c числа a есть делитель a/c. Если $c \neq a/c$, то вычекркнем из соответствующего столбца наименьшее из них. Поскольку из каждой пары вида $c, a/c$ вычеркнуто не более одного числа, то всего вычеркнуто не более половины чисел в столбце. Аналогичную операцию произведем со столбцом числа b.

Предположим теперь, что в левом столбце осталось число c, в правом — число d, и $a+b$ делится на $c+d$. Отметим, что c и d взамино просты, ибо любой их общий делитель, больший 1, изначально оказался бы в обоих столбцах. Положим $x = a/c$, а $y = b/d$. Отметим, что x и y — собственные делители a и b. Таким образом, $a+b = xc+yd$.

Раз $xc+yd$ делится на $c+d$, то $xc+yd-x(c+d)$ тоже делится на $c+d$. Итого $d(y-x) \vdots (c+d)$. Поскольку числа d и $c+d$ взаимно просты, то $(y-x) \vdots (c+d)$, но $|y-x| < y+x \leqslant c+d$, притом $y \neq x$, так как известно, что среди делителей a и b нет равных. Выходит, $a+b$ не может делиться на $c+d$.

$\square$

Критерии.
Полное решение — 7 баллов.