



Олимпиада ЮМШ. Второй тур. 6 декабря 2015.
11 класс

Сюжет 1. Рациональные многочлены

Будем для краткости называть *n*-рациональным многочленом многочлен степени *n* с рациональными коэффициентами, где *n* — натуральное число.

1. Укажите все *n*, при которых *n*-рациональный многочлен может иметь иррациональный корень.
2. При каком минимальном *n* существуют такие числа *a* и *b*, что каждое из них является корнем какого-то *n*-рационального многочлена, но их сумма *a+b* не является корнем никакого *n*-рационального многочлена?
3. При каком минимальном *n* существует *n*-рациональный многочлен $P(x)$, который положителен при всяком рациональном *x*, но имеет иррациональный корень?
4. Пусть *n*-рациональный многочлен $P(x)$ таков, что для любого натурального *y* найдётся рациональное число *x*, для которого $P(x)=y$. Какие значения может принимать *n*?

Сюжет 2. Волшебные кубики

Андрюша строит башенки из волшебных кубиков с ребром 1. Кубик можно поставить на другие кубики, если более половины площади его нижней грани касается других кубиков. *Этажом* называется множество всех кубиков, находящихся на определённой высоте. Этажи нумеруются снизу вверх.

1. Если на первом этаже 2 кубика, может ли на третьем быть 6?
2. Если на первом этаже 3 кубика, может ли на втором быть 5?
3. Если на первом этаже 1009 кубиков, может ли на втором быть 2016?
4. Андрюша построил двухэтажную башню, на втором этаже которой оказалось *m* кубиков. Но тут подошёл Боря, убрал весь второй этаж, а на первый этаж добавил ещё один кубик (не передвигая остальных кубиков первого этажа). Обязательно ли Андрюша, не изменяя первого этажа, сумеет теперь поставить *m+1* кубик на второй этаж?

Сюжет 3. Годные и негодные числа

Натуральное число называется *годным*, если оно делится на свою наибольшую цифру, и *негодным* в противном случае.

1. Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из годных чисел?
2. Каких чисел больше среди первого триллиона натуральных чисел: годных или негодных?
3. Докажите, что среди любых 20 последовательных чисел найдётся как годное, так и негодное.
4. Какое максимальное количество негодных чисел может идти подряд?