

## 9-11 класс, 2 отбор

### АЛГЕБРА

10. Известно, что  $\sqrt{5+x} + \sqrt{20-x} = 6$ . Чему равен  $\sqrt{(5+x)(20-x)}$ ?

20. В метро работает два эскалатора, двигающиеся вниз и вверх соответственно с одинаковой скоростью. Люди на этих эскалаторах распределяются равномерно и стоят (т.е. неподвижны относительно эскалатора), но потоки людей, едущих вверх и вниз, неодинаковы. За время движения по эскалатору вниз Петя насчитал 200 человек на встречном эскалаторе. Ровно за тот же отрезок времени Вася, проехавший весь эскалатор вверх, насчитал 350 человек, спускающихся вниз. А сколько человек (в обе стороны) за тот же период времени проедет мимо контролёра, сидящего в будке у основания эскалатора?

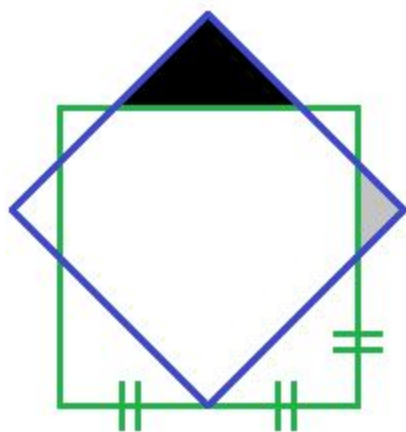
30. Найдите целое число  $n$ , удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{1}{10^{n+1}} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015} < \frac{1}{10^n}$$

40. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. В процессе огранки бриллиант раскололся на три части, одна из которых втрое тяжелее другой. Стоимость трёх обломков была оценена в 100000 долларов. Найдите максимальную стоимость, которую мог иметь исходный бриллиант.

### ГЕОМЕТРИЯ

10. Площадь синего квадрата составляет  $\frac{8}{9}$  от площади зелёного. Найдите отношение площади серого треугольника к площади чёрного.



20. Биссектриса внешнего угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает его описанную окружность в точке  $D$ . Оказалось, что  $\angle ACD = \angle ACB = 28^\circ$ . Найдите угол  $A$  треугольника  $ABC$ .

30.  $OT$  — биссектриса угла  $MON$ . Окружность с центром  $P$  касается лучей  $OM$  и  $OT$  в точках  $A$  и  $A'$  соответственно, а окружность с центром  $Q$  касается лучей  $ON$  и  $OT$  в точках  $B$  и  $B'$  соответственно. Радиус первой из этих окружностей вдвое больше, чем радиус второй. Пусть  $H$  — точка пересечения прямых  $AB'$  и  $OP$ . Найдите  $AH$ , если  $A'B = 12$ .

40. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  прямые,  $H$  — точка пересечения диагоналей,  $AH = 4$ ,  $HC = 2$ ,  $BD = 4\sqrt{3}$ . Найдите площадь  $ABCD$ .

## КОМБИНАТОРИКА

10. На каждой клетке доски  $9 \times 9$  стоит фишка. Сколькими способами можно переставить эти фишки между собой так, чтобы расстояние между любыми двумя фишками не уменьшилось и хотя бы одна фишка изменила своё местоположение? Под расстоянием между фишками подразумевается расстояние между центрами их клеток.

20. Аркадий, Вячеслав, Георгий и Иван составляют график дежурств на 21 день. В первый и последний дни должен дежурить Аркадий, а в остальные — кто-то из них четверых. Оказалось, что Аркадий не дружит с Иваном, а Вячеслав с Георгием, а остальные дружат. Они решили составить график так, чтобы в соседние дни обязательно дежурили друзья и никто не дежурил два дня подряд. Сколько у них способов это сделать?

30. У модели Юлочки в шкафу висят 70 платьев трех цветов: алого, бордового и кармин. Если она не глядя вытащит из шкафа 14 платьев, среди них обязательно найдется 6 одного цвета. Какое наименьшее количество платьев ей надо достать, чтобы обязательно нашлось сразу 25 платьев одного цвета?

40. На столе лежит 250 конфет. Малыш и Карлсон играют в игру. Каждым ходом Малыш берет несколько конфет и кладет в отдельную коробочку, а Карлсон выбирает, кому из них достанется эта коробочка. Когда у кого-то из них окажется 13 коробок, все оставшиеся на столе конфеты забирает другой из них. Если конфеты заканчиваются раньше, то игра заканчивается. Какое наибольшее количество конфет сможет гарантированно добыть себе Малыш?

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Найдите наибольшее натуральное число, состоящее из различных нечётных цифр, которое делится на все свои цифры.

20. Сколько существует целых чисел  $n$  на отрезке  $[400; 900]$ , для которых  $n^n$  — точный квадрат?

30. Два числа, не делящихся друг на друга, сложили вместе с их наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным. В результате получилось число 442. Найдите исходные числа. В ответе напишите их в порядке возрастания через пробел.

40. Найдите все такие пары чисел  $a, p$  ( $a$  – натуральное,  $p$  – простое,  $a < p$ ), для которых  $n^5 + a$  делится на  $p$  как минимум при трёх последовательных значениях  $n$ . В ответе укажите сумму всех возможных  $a$ .