



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 11 апреля 2021 года  
9 класс. Основная аудитория



**Сюжет 1.**

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов  $A$  называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из  $A$  и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из  $A$  не дружат. Оказалось, что каждый троглодит с кем-то дружит.

**1.1.** В армии нашлись троглодиты Вася и Петя, образующие общительное множество. Тогда Шакти может найти странное общительное множество из не более, чем 50 троглодитов.

**1.2.** Пусть не нашлось таких четырех троглодитов  $A, B, C$  и  $D$ , что  $A$  дружит с  $B, C$  и  $D$ , а  $B, C$  и  $D$  между собой нет. Дас нашел общительное множество размера  $k$ . Докажите, что Шакти сможет найти странное общительное множество размера не более  $k$ .

**Сюжет 2.**

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрашенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрашенной). Пусть  $A$  — закрашенное множество,  $S(A)$  — его площадь.

**2.1.** Приведите пример такого  $A$ , что  $S(A) \geq 1$ .

**2.2.** Докажите, что  $S(A) \leq 2$ .

**Сюжет 3.**

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что  $n \geq 10$ .

**3.1.** Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leq n! - 4^n \leq 4n.$$

**3.2.** Найдите все натуральные  $n$  и составные  $k$  такие, что

$$n \leq n! - k^n \leq kn.$$



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 11 апреля 2021 года  
9 класс. Выводная аудитория



**Сюжет 1.**

В армии Шакти состоит 100 троглодитов; некоторые троглодиты дружат друг с другом, а некоторые нет. Множество троглодитов  $A$  называется *общительным*, если любой другой троглодит дружит с кем-то из  $A$  и *странным общительным*, если при этом никакие два троглодита из  $A$  не дружат.

**1.3.** Покажите, что странного общительного множества из не более чем 81 троглодита может и не оказаться.

**1.4.** Докажите, что Шакти всегда сможет найти странное общительное множество не более, чем из 82 троглодитов.

**Сюжет 2.**

Есть квадрат со стороной 2. Вася закрасил в нем конечное число многоугольников так, что не нашлось закрасенных точек на расстоянии 1 (граница считается незакрасенной). Пусть  $A$  — закрасенное множество,  $S(A)$  — его площадь.

**2.3.** Приведите пример  $A$  с  $S(A) \geq 2,5 - \sqrt{2}$ .

**2.4.** Оцените сверху  $S(A)$  как 1.65.

**Сюжет 3.**

Во всех пунктах помимо указанных предположений считается, что  $n \geq 10$ .

**3.3.** Найдите все простые  $n$  и натуральные  $k$  такие, что

$$n \leq n! - k^n \leq kn.$$

**3.4.** Решите неравенство в натуральных числах:

$$n \leq n! - k^n \leq kn.$$