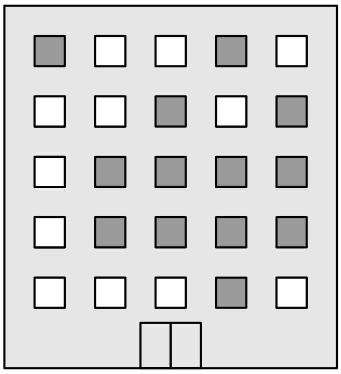
Решения и критерии заочного тура олимпиады ЮМШ
4 класс

В каждой из трёх задач сформулировано по четыре вопроса. Ответ на вопрос подразумевает полное развернутое решение. Если в вопросе требуется привести пример, то нужно просто привести пример. Если в вопросе требуется что-либо вычислить, то нужно привести всю последовательность вычислений. Если вопрос сформулирован в виде «может ли», то нужно привести пример, если считаете, что может, а если считаете, что не может, то необходимо доказать это. Если вопрос сформулирован в виде «какое наибольшее/наименьшее...», то требуется предъявить пример, для которого достигается наибольшее/наименьшее значение, и показать, что больше/меньше получить нельзя. Если в вопросе требуется перечислить варианты или сказать «сколько может быть», то необходимо перечислить все возможные варианты и доказать, что других вариантов нет.

За полный ответ на вопрос начисляется количество баллов, указанное рядом с вопросом. За неполный ответ начисляется меньшее число баллов в зависимости от полноты ответа. Результат по олимпиаде равен сумме набранных баллов.

1. На рисунке изображена одна сторона пятиэтажного дома, у которого в некоторых окнах горит свет (они нарисованы белыми). В этом доме всё как обычно: все квартиры одноэтажные, расположение квартир на каждом этаже одинаковое, каждая квартира хотя бы одним окном выходит на эту сторону, окна от одной квартиры могут идти только подряд.



(а) Какое наибольшее число квартир может быть в этом доме? (1 балл)

(б) Может ли в этом доме быть 13 квартир? (3 балла)

(в) Сколько квартир может быть в доме, если на первом этаже свет горит ровно в двух квартирах? (6 баллов)

(г) Пусть известно, что свет горит ровно в 9 квартирах. Перечислите все возможные расположения квартир на этажах и докажите, что других вариантов нет. (10 баллов)

Решения.

(а) 25. Такое число квартир получается, когда каждая квартира выходит на данную сторону дома ровно одним окном. Квартир не может быть больше, чем число окон.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

(б) Нет, не может, так как число квартир должно делиться на число этажей.

Критерии. Фраза типа «число квартир должно делится на 5» — 3 балла.

(в) Если тёмное окно на первом этаже — это отдельная квартира, тогда пятое окно — это тоже отдельная квартира, и первых три окна должны принадлежать одной квартире. В этом случае на первом этаже будет всего три квартиры, а в доме — 15 квартир. Если тёмное окно на первом этаже не является отдельной квартирой, то оно принадлежит одной из тех двух квартир, в которых горит свет. В этом случае на первом этаже будет всего две квартиры, а во всем доме — 10 квартир.

Критерии. Фраза типа «На этаже может быть либо 2, либо 3 квартиры. Следовательно, всего либо 10, либо 15 квартир» — 3 балла. Если еще есть объяснение того, что на первом этаже не может быть другого числа квартир, то 6 баллов.

(г) Если два соседних окна на этаже принадлежат разным квартирам, то будем говорить, что между ними есть перегородка. Между двумя соседними окнами перегородка может либо стоять, либо не стоять. Поэтому существует всего 16 вариантов расположения перегородок. Перебирая все эти 16 вариантов, получаем, что свет будет гореть ровно в 9 квартирах только в том случае, когда перегородки стоят между первым и вторым окном и между четвёртым и пятым окном на этаже. В полном решении, конечно же, надо привести все эти 16 вариантов.

Критерии. Приведена правильная схема квартир — 3 балла. Если еще показано, что другие варианты невозможны — 10 баллов. Если при переборе вариантов пропущен один вариант, то 9 баллов.

2. В этой задаче рассматриваются фигурки, нарисованные на клетчатой бумаге. Каждая такая фигурка состоит из целых клеток, склеенных по сторонам и вместе образующих один кусок. Если из фигурки вырезать какие-то клетки, то она может развалиться на несколько кусков (когда два куска касаются только уголком, они разваливаются).

(а) Приведите пример фигурки, состоящей более чем из двух клеток, которая не развалится, какую бы клетку из нее ни вырезали. (1 балл)

(б) Приведите пример такой фигурки, из которой можно вырезать ровно 4 клетки так, чтобы фигурка без этих четырёх клеток не развалилась на куски, и можно четырьмя способами вырезать всего по одной клетке так, чтобы остальная часть развалилась. (3 балла)

(в) Пять одинаковых фигурок лежали стопкой, одна под другой. Потом одну фигурку сместили на клетку влево, другую — на клетку вправо, третью — на клетку вниз, а четвертую — на клетку вверх. Затем из каждой фигурки вырезали одну клетку, причем все вырезанные клетки оказались строго одна под другой. Могло ли оказаться так, что одна фигурка развалились, а четыре других — нет? (6 баллов)

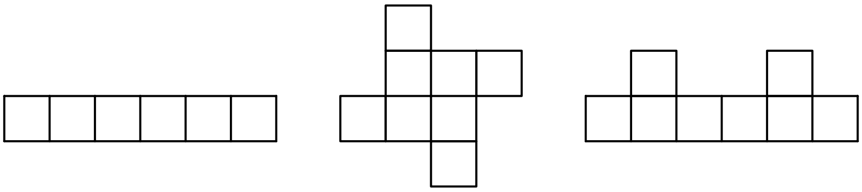
(г) Докажите, что любую фигурку из 533 клеток можно развалить, вырезав из нее не более двух клеток. (10 баллов)

Решения.

(а) Например, квадрат 2×2. Или прямоугольник $n \times m$, где $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$.

Критерии. Приведён пример — 1 балл.

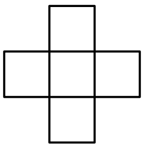
(б) Вот примеры:



Есть и другие варианты.

Критерии. Приведён пример — 3 балла.

(в) Да, могло. В качестве такой фигурки можно взять крест:



Критерии. Приведён пример и показано, какую клетку вырезать, — 6 баллов.

(г) Решение 1. Возьмём самый верхний ряд клеток фигуры (он есть, так как число клеток фигуры конечно). В этом ряду возьмём самую правую клетку фигуры. Справа и сверху от выбранной клетки нет клеток фигуры. Поэтому эту клетку можно отрезать от остальной фигуры, вырезав не более двух клеток: соседку снизу (если есть) и соседку слева (если есть).

Решение 2. Встанем на любую клетку фигуры и будем идти по клеткам фигуры сначала вправо до упора, потом вверх до упора, потом опять вправо, опять вверх, и так будем продолжать до тех пор, пока есть куда идти. Так как клеток в фигуре конечное количество, а сумма наших координат монотонно возрастает, то через несколько шагов мы остановимся на клетке, справа и сверху от которой не будет клеток фигуры. Эту клетку можно отрезать от остальной фигуры, вырезав не более двух клеток: соседку снизу (если есть) и соседку слева (если есть).

Критерии. Приведёно решение, похожее на авторское, — 10 баллов. Решения типа «у любой фигуры есть угловая клетка» или «... <приведено несколько фигур>..., а потом говорится, что обязательно найдётся угловая клетка», оцениваются в 2 балла.

3. В кружке магии и волшебства все ученики первого и второго годов обучения ходят в красных мантиях, ученики третьего года — в синих, а четвёртого — в чёрных.

В прошлом году на общем собрании учеников было 15 красных, 7 синих и несколько чёрных мантий, а в этом году — синих и чёрных — поровну, а красных — вдвое больше, чем синих.

(а) Сколько черных мантий будет на общем собрании в следующем году? (1 балл)

(б) Сколько в этом году учеников первого года обучения? (3 балла)

(в) Через какое наименьшее число лет синих и чёрных мантий снова может быть поровну? (6 баллов)

(г) Пусть дополнительно известно, что каждый год количество учеников первого года обучения на 1 меньше количества учеников четвертого года обучения. Через сколько лет количество красных мантий впервые станет втрое больше количества синих? (10 баллов)

Решения.

(а) 7 мантий. Так как 7 синих мантий прошлого года станут чёрными в этом году и в этом году синих и чёрных мантий поровну, то в этом году тоже 7 синих мантий, которые станут чёрными в следующем году.

Критерии. Приведён ответ — 1 балл.

(б) 6 учеников. В этом году 7 синих, 7 чёрных и $14 = 2 \times 7$ красных мантий. Значит, в прошлом году было $8 = 15 - 7$ учеников первого года обучения, которые в этом году станут учениками второго года обучения. Следовательно, в этом году $14 - 8 = 6$ учеников первого года обучения.

Критерии. Приведён ответ и объяснения — 3 балла.

(в) Через три года. В прошлом году в кружок пришло 8 новых учеников, в этом году — 6. Если в следующем году вновь придёт 6 новых учеников, то через три года будет 6 синих и 6 чёрных мантий:

$$(6, 8, 7, 7) \to (6, 6, 8, 7) \to (?, 6, 6, 8) \to (?, ?, 6, 6).$$

Если в следующем году придёт не 6 новых учеников, то в течение ближайших трёх лет число синих и чёрных мантий будет различным. Поэтому наименьшее число лет, через которое синих и чёрных мантий может быть поровну, равно трём.

Критерии. Приведён пример для трёх лет — 4 балла. Если еще показано, что меньше трёх лет нельзя, — 6 баллов.

(г) Через 17 лет. Состав учеников следующего года однозначно вычисляется по составу учеников этого года: $(a, b, c, d) \to$ $\to (c-1, a, b, c)$. Если последовательно выписывать состав учеников каждого года:

$$(6, 8, 7, 7) \to (6, 6, 8, 7) \to (7, 6, 6, 8) \to (5, 7, 6, 6) \to \ldots,$$

то через 17 лет впервые получим состав учеников, удовлетворяющий условию. Это будет состав $(2, 1, 1, 3)$, в котором $2 + 1 = 3$ красные мантии и одна синяя.

Критерии. Приведена правильная последовательность состава учеников за 17 лет — 10 баллов. Если ученик понял, как выписывать последовательность, но допустил одну арифметическую ошибку (и, возможно, получил неверный ответ) — 6 баллов. Всё остальное — 0 баллов.