

Сюжет 1

На доске написана тройка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске тройку (a, b, c) на тройку $(f(a), f(b), f(c))$, где f — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

- 1.1. Можно ли из тройки с числами 2, 4, 7 получить тройку чисел 2, 6, 9 в каком-нибудь порядке?
- 1.2. Можно ли из тройки (1, 4, 7) получить (1, 10, 7) (числа именно в таком порядке)?
- 1.3. Докажите, что если тройку (x, y, z) можно получить из тройки (a, b, c) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.
- 1.4. Верно ли, что четверку (1, 2, 3, 4) можно превратить в четверку $(1^{9999}, 2^{9999}, 3^{9999}, 4^{9999})$ применением аналогичных операций над четвёрками?

Сюжет 2

Шары с номерами от 1 до 800 поровну разложены по N сосудам неизвестным фокуснику образом. Он отдает команды вида «поменяйте шары с номерами i и j », после чего ассистент меняет их, если они и вправду в разных сосудах (иначе ничего не происходит). После нескольких команд фокусник останавливается.

- 2.1. Пусть $N = 2$. Докажите, что фокусник гарантированно может добиться того, чтобы в итоге хотя бы один шар оказался не в своём изначальном сосуде.
- 2.2. Пусть $N = 400$. Докажите, что фокусник может добиться того, чтобы гарантированно более половины шаров лежали не в своём сосуде.
- 2.3. Пусть $N = 400$. Какое максимально возможное количество шаров не в своём сосуде может гарантировать фокусник?
- 2.4. Пусть $N = 2$. Фокуснику выдали последовательность команд. Он хочет повторить её несколько раз (по своему усмотрению, но не более k раз) так, чтобы после этого гарантированно хотя бы один шар оказался в своём исходном сосуде. При каком наименьшем k это возможно независимо от последовательности выданных команд?

Сюжет 3

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бежит по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков внутри или по границе сада) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

- 3.1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.
- 3.2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной 2,65.
- 3.3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 1,29.
- 3.4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной более 2.