

Сюжет 1

На доске написана тройка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске тройку (a, b, c) на тройку $(f(a), f(b), f(c))$, где f — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

1.1. Можно ли из тройки с числами 2, 4, 7 получить тройку чисел 2, 6, 9 в каком-нибудь порядке?

1.2. Можно ли из тройки (1, 4, 7) получить (1, 10, 7) (числа именно в таком порядке)?

1.3. Докажите, что если тройку (x, y, z) можно получить из тройки (a, b, c) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.

1.4. Верно ли, что четверку (1, 2, 3, 4) можно превратить в четверку $(1^{9999}, 2^{9999}, 3^{9999}, 4^{9999})$ применением аналогичных операций над четвёрками?

Сюжет 2

Шары с номерами от 1 до 800 поровну разложены по N сосудам неизвестным фокуснику образом. Он отдает команды вида «поменяйте шары с номерами i и j », после чего ассистент меняет их, если они и вправду в разных сосудах (иначе ничего не происходит). После нескольких команд фокусник останавливается.

2.1. Пусть $N = 2$. Докажите, что фокусник гарантированно может добиться того, чтобы в итоге хотя бы один шар оказался не в своём изначальном сосуде.

2.2. Пусть $N = 400$. Докажите, что фокусник может добиться того, чтобы гарантированно более половины шаров лежали не в своём сосуде.

2.3. Пусть $N = 400$. Какое максимально возможное количество шаров не в своём сосуде может гарантировать фокусник?

2.4. Пусть $N = 2$. Фокуснику выдали последовательность команд. Он хочет повторить её несколько раз (по своему усмотрению, но не более k раз) так, чтобы после этого гарантированно хотя бы один шар оказался в своём исходном сосуде. При каком наименьшем k это возможно независимо от последовательности выданных команд?

Сюжет 3

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бежит по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков внутри или по границе сада) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

3.1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.

3.2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной 2,65.

3.3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 1,29.

3.4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной более 2.