Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
8 класс. Основная аудитория

1. В футбольном матче между командами «Зубило» и «Шайба» на победу команды «Зубило» принимали ставки 1 к 2 (то есть при выигрыше «Зубила» тотализатор выплачивал человеку в два раза больше, чем тот поставил), на победу «Шайбы» — 1 к 3. Волька смог сделать ставку, зная, что он точно получит обратно ровно столько, сколько поставил, независимо от исхода игры. Из какой пропорции принимали ставки на ничью?

Решение. Пусть Волька поставил $2x$ на «Шайбу», тогда его ставка на «Зубило» равна $3x$. Поскольку он в любом случае получит $6x$, его ставка на ничью равна x, таким образом, коэффициент на ничью равен 1 к 6. □

2. Васе нравятся натуральные числа, которые делятся на каждую свою ненулевую цифру, например, 10 или 122. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел может нравиться Васе?

Решение. Ответ: 13.

Подходят, например, числа от 111 111 111 111 111 111 000 до 111 111 111 111 111 111 012.

Заметим, что если Васе нравятся числа x и $x+10$, то x не может иметь последнюю цифру 3, 6 или 9 (поскольку x и $x+10$ не могут одновременно делиться на 3). Поэтому больше 13 чисел подряд идти не могут. □

3. На диагонали BD равнобокой трапеции $ABCD$ нашлась точка E такая, что основание BC и отрезок CE являются катетами прямоугольного равнобедренного треугольника. Докажите, что прямые AE и CD перпендикулярны.

Решение. Раз прямоугольный треугольник равнобедренный, и трапеция равнобедренная, то углы между диагоналями и основаниями равны 45°. Тогда диагонали пересекаются под прямым углом. Тогда в треугольнике ACD высоты пересекаются в точке E, из этого следует, что прямая AE пересекает CD под прямым углом. □

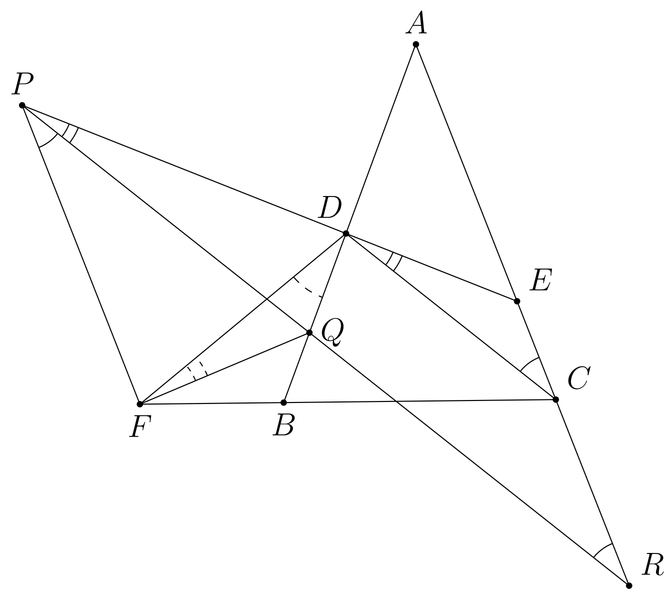
4. Решите уравнение $kn^2 + n + k^2 + 2k - 1 = 0$ в целых числах.

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной k. Тогда его дискриминант равен
$$(n^2+2)^2 - 4(n-1) = n^4 + 4n^2 - 4n + 8.$$
Заметим, что это выражение всегда больше, чем $(n^2+1)^2$, и меньше, чем $(n^2+3)^2$ для $n \neq -1$. Значит, нужно проверить $n = -1$ (в этом случае дискриминант не является квадратом целого числа) и $n = 1$, при котором дискриминант равен $(n^2+2)^2$. Получается уравнение $k^2 + 3k = 0$, и, как результат, пары решений $n = 1$; $k = 0$ и $n = 1$; $k = -3$. □

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
8 класс. Выводная аудитория

5. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, на боковой стороне AC — точка E, а на продолжении основания BC за точку B — точка F, причем $CD = DF$. На прямой DE выбрана точка P, а на отрезке BD — точка Q так, что $PF \parallel AC$ и $PQ \parallel CD$. Докажите, что $DE = QF$.

Решение. Докажем, что треугольники DFQ и CDE равны по двум углам и стороне между ними, отсюда будет следовать требуемое равенство отрезков.



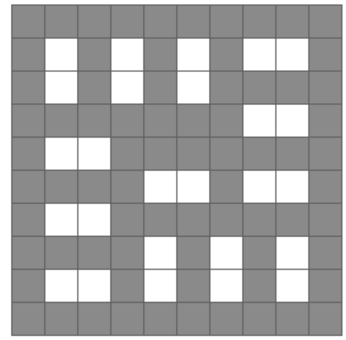
- $CD = DF$ по условию.
- Так как треугольники ABC и DFC равнобедренные, то
$$\angle FDQ = \angle ABC - \angle DFC = \angle ACB - \angle DCF = \angle DCE.$$
- Раз прямые DC и PQ параллельны, то
$$\angle EDC = \angle DPQ.$$
Кроме того, пусть R — точка пересечения PQ и AC, тогда из той же параллельности $\angle DCE = \angle PRE$; а из параллельности PF с AC следует, что $\angle PRE = \angle FPQ$. По предыдущему пункту $\angle DCE = \angle FDQ$, то есть четырёхугольник $FPDQ$ вписан, отсюда
$$\angle EDC = \angle DPQ = \angle DFQ.$$

□

6. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в чёрный или белый цвет. Говорят, что клетка не в своей тарелке, если у неё хотя бы семь соседей не такого цвета, как она сама. (Соседями называются клетки, у которых есть общая сторона или общий угол.) Какое наибольшее количество клеток на доске одновременно могут быть не в своей тарелке?

Решение.

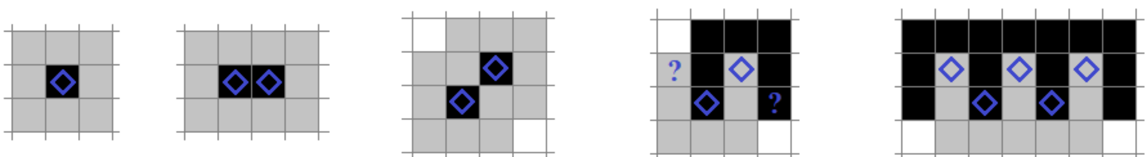
Ответ 26. *Пример* состоит из 13 доминошек, не имеющих общих клеток и не примыкающих к границе доски.



Оценка. Назовем клетку не в своей тарелке НВСТ-клеткой. Очевидно, НВСТ-клетки не могут прилегать к границе. Изучим, какой вид может иметь компонента связности НВСТ-клеток, считая соседними клетки с общей стороной или углом. Простейший вариант — изолированная клетка (случай *а* на рисунке).

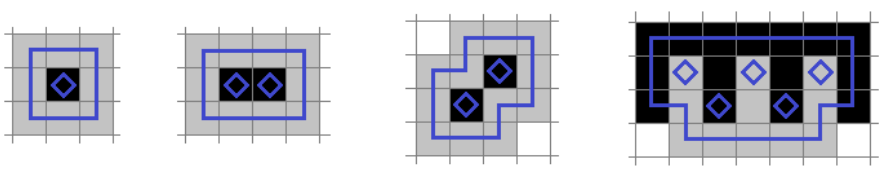
Пусть теперь две соседние НВСТ-клетки имеют один цвет (скажем, первый). Тогда их соседи — клетки второго цвета, каждая из которых имеет хотя бы две клетки второго цвета, имеют второй цвет и каждый по определению граничат с клетками второго цвета, у каждой из которых хотя бы два соседа второго цвета, то есть они не НВСТ. Получаем варианты *б* и *в*.

Рассмотрим две соседние НВСТ-клетки разных цветов. Они могут быть соседними только по углу, и такая картинка определена однозначно с точностью до отражения. Далее, из соседних с ними клеток НВСТ-клетками могут быть только те, что на рисунке помечены «?», и так далее, в результате образуется «змейка» (с двумя и более НВСТ-клетками — *г*).



а ***б*** ***в*** ***г***

Теперь для каждой клетки нарисуем её 0,5-окрестность — квадратик со стороной 2 (его стороны идут не по линиям сетки), в котором наша клетка в центре. Компоненты, на которые разбиваются НВСТ-клетки — одноклеточные, доминошки и «змейки» из n клеток (в том чисел из 2 клеток одного цвета) — имеют окрестности размером 4, 6 и $3n+1$ клеток соответственно. Эти окрестности не пересекаются и лежат в центральном квадрате 9×9.



Площадь окрестности компоненты минимум втрое превосходит площадь самой компоненты, причём равенство достигается только для доминошки. Если НВСТ-клеток 27, то минимальная площадь окрестностей как раз равна площади квадрата 9×9 ($27 \cdot 3 = 81$), но отношение ровно 3 может быть, лишь если всё разбито на доминошки, а 27 нечётно — противоречие.

$\square$

7. У Васи есть $10n^2$ троек из n-элементного множества. Докажите, что в этом множестве найдутся такие элементы a, b, c, d, e, f, что у Васи есть тройки $\{a, b, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{c, a, f\}$.

Решение. Назовём пару элементов *плохой*, если она содержится более чем в 0, но менее чем в 4 тройках. Будем удалять такие тройки до тех пор, пока есть плохие пары. Заметим, что каждую пару элементов мы рассматривали не более одного раза, то есть всего мы удалили не более $4C_n^2 = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} < 2n^2$ троек. Значит, у нас остались какие-то тройки, и каждая пара элементов теперь либо не содержится в тройках, либо содержится хотя бы в четырёх.

Рассмотрим любую из оставшихся троек, назовём её $\{a, b, c\}$. Каждая из пар $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ содержится ещё хотя бы по 3 тройки, значит можно выбрать d, e и f различными. $\square$