



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 24 ноября 2019 года  
8 класс. Основная аудитория



1. В футбольном матче между командами «Зубило» и «Шайба» на победу команды «Зубило» принимали ставки 1 к 2 (то есть при выигрыше «Зубила» тотализатор выплачивал человеку в два раза больше, чем тот поставил), на победу «Шайбы» — 1 к 3. Волька смог сделать ставку, зная, что он точно получит обратно ровно столько, сколько поставил, независимо от исхода игры. Из какой пропорции принимали ставки на ничью?
2. Васе нравятся натуральные числа, которые делятся на каждую свою ненулевую цифру, например, 10 или 122. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел может нравиться Васе?
3. На диагонали  $BD$  равнобокой трапеции  $ABCD$  нашлась точка  $E$  такая, что основание  $BC$  и отрезок  $CE$  являются катетами прямоугольного равнобедренного треугольника. Докажите, что прямые  $AE$  и  $CD$  перпендикулярны.
4. Решите уравнение  $kn^2 + n + k^2 + 2k - 1 = 0$  в целых числах.



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
II тур, 24 ноября 2019 года  
8 класс. Выводная аудитория



5. На боковой стороне  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , на боковой стороне  $AC$  — точка  $E$ , а на продолжении основания  $BC$  за точку  $B$  — точка  $F$ , причем  $CD = DF$ . На прямой  $DE$  выбрана точка  $P$ , а на отрезке  $BD$  — точка  $Q$  так, что  $PF \parallel AC$  и  $PQ \parallel CD$ . Докажите, что  $DE = QF$ .
6. Каждая клетка доски  $10 \times 10$  покрашена в чёрный или белый цвет. Говорят, что клетка не в своей тарелке, если у неё хотя бы семь соседей не такого цвета, как она сама. (Соседями называются клетки, у которых есть общая сторона или общий угол.) Какое наибольшее количество клеток на доске одновременно могут быть не в своей тарелке?
7. У Васи есть  $10n^2$  троек из  $n$ -элементного множества. Докажите, что в этом множестве найдутся такие элементы  $a, b, c, d, e, f$ , что у Васи есть тройки  $\{a, b, d\}$ ,  $\{b, c, e\}$ ,  $\{c, a, f\}$ .