

9-11 класс, 1 отбор

АЛГЕБРА

10. Дан квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$. Известно, что квадрат суммы его корней на 10 больше суммы квадратов его корней. Найдите q .
20. Выражение $x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x + k$ делится на $x - r$ при двух различных действительных r . Одно из них $r = 2$. Найдите другое.
30. Найдите наименьшее такое a , что при любых $x, y \in [1, 2]$ выполняется неравенство $x^2 + y^2 \leq axy$.
40. Решите уравнение $x[x] = 533$ в рациональных числах. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

ГЕОМЕТРИЯ

10. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 1$ см, $BC = AC = 2$ см, точка D — середина AB , а точка E — центр вписанной окружности. Найдите отношение CE/CD .
20. Какую часть площади правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ составляет площадь четырехугольника $ABCD$?
30. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность радиуса 35. DX — хорда этой окружности длины 50, Y — точка пересечения DX и диагонали AC . Найдите DY .
40. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P , для которой $PA : PB : PC = 1 : 12 : 17$. Найдите градусную величину угла APB .

КОМБИНАТОРИКА

10. Мальчик Вася нашёл двузначное число и решил поиграть с ним в игру. Он совершил несколько ходов. На каждом ходу он меняет местами цифры этого числа, а затем увеличивает его на 1. Так вышло, что после каждого хода у него получалось двузначное число, причём такое, которое он раньше не получал. Через несколько ходов ему наскучило это занятие и он бросил игру. Какое максимальное количество ходов он мог сделать?
20. На шахматной доске расставили 8 не бьющих друг друга ладей. Потом все ладьи заменили на королей. Сколько пар королей могут бить друг друга? В поле ответа напишите количество различных вариантов ответа.
30. Улитка ползает путешествует по глобусу. Каждую ночь она ночует на 1 градус севернее или на 1 градус южнее экватора. В течение дня она либо переползает ровно на 30 градусов на восток строго вдоль параллели, либо переходит через экватор строго вдоль

меридиана. Улитка никогда не ночует в одном месте. Сколько у неё есть способов совершить кругоглобусное путешествие, вернувшись в точку, из которой она стартовала?

40. N точек на окружности раскрасили в 4 цвета. Потом соединили отрезками одноцветные точки. Для какого максимального N точки можно покрасить так, чтобы нельзя было выбрать 4 непересекающихся отрезка? (Отрезки с общими концами тоже считаются пересекающимися.)

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Переставьте цифры в числе 7210 так, чтобы получившееся четырёхзначное число не делилось на числа от 2 до 40.

20. У скольких чисел от 1200 до 1500 количество делителей является нечётным простым числом?

30. Разность двух натуральных чисел равняется квадрату их наибольшего общего делителя, а произведение является квадратом некоторого натурального числа A . На какую цифру может заканчиваться A ? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания через пробел.

40. Найдите наибольшее натуральное n , при котором $n^2 + 1$ имеет делитель на интервале $[n, n + 100]$.