Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 700 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

Ответ: 31.

2. Тридевятое царство расположено на шести островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два квадрата с общей стороной, где вершины квадратов — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

Ответ: 23 или 22 (в зависимости от того, считать ли вариант «ничего не ломать»).

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 14?

Ответ: 72 897 695.

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n+18$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 2 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

Ответ: 5832.

Геометрия

1. ABC — равносторонний треугольник. Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 15 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

Ответ: 180.

2. H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. HX — перпендикуляр из этой точки на AB. $AX = 3, XB = 7, HX = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 26,25.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Радиус первой окружности равен 4, в второй — 6, расстояние между центрами равно 20. К ним проведены две общие внутренние касательные l_1 и l_2, пересекающиеся в точке T. P — точка пересечения ω_1 и l_1. Прямая b — биссектриса угла $\angle O_1TP$. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b через R, ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b — через S. Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$

Ответ: 72.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = 3, OB = 4, OC = 5$. Найдите длину стороны ABC с точностью до третьего знака после запятой.

Ответ: 6,766.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^2$ делится на $100!$.

Ответ: 97.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение НОД$(a-8, b^3+1, a^2+b)$.

Ответ: 262 143.

3. Простое число p называют *числишком*, если существует такое натуральное число n, что $5p = [\frac{n^2}{5}]$. Найдите сумму всех числишек.

Ответ: 52.

4. Дано 900-значное число $N = 148148\ldots148$. Найдите какое-нибудь натуральное число x, имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 - x + 1$.

Ответ: например, $10^{20}+1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $4^{(3^2)} : \left(4^3\right)^2 = 4^{(3^x)}$.

Ответ: 1.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^2\} = \{\sqrt[3]{x}\}$ на промежутке $[1, 1000]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a.

Ответ: 999 991.

3. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = \Big|\ldots\Big|\Big||x^2 - 2x + a| - 1\Big| - 1\Big|\ldots\Big| - 1 \qquad (2018 \text{ пар } |\ldots|)$$

имеет нечётное число корней.

Ответ: -2017.

4. Пусть $A = \{1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \ldots, \frac{3^{1000}}{5^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 2,3.