Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 600 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

Ответ: 31.

2. Тридевятое царство расположено на девяти островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два пятиугольника с общей стороной, где вершины пятиугольников — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты (хотя бы один) так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

Ответ: 33.

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 15?

Ответ: 71 933 793.

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n+20$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 3 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

Ответ: 14 641.

Геометрия

1. ABC — равнобедренный треугольник с прямым углом A. Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 30 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

Ответ: 270.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AX и CZ. $AZ = 9$, $BX = 5$, $BZ = 4$. Найдите площадь треугольника ABC с точностью до 3 знака после запятой.

Ответ: 62,4.

3. Даны две окружности ω_1и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно. Радиус первой окружности равен 4, второй 3, расстояние между центрами равно 2. К ним проведены две общие касательные l_1 и l_2, пересекающиеся в точке T. P — точка пересечения ω_1 и l_1. Прямая b — делит угол O_1TP пополам. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b за R, ближнюю к T точку пересечения ω_2и b за S. Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$.

Ответ: 36.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = \sqrt{2}, OB = \sqrt{3}, OC = \sqrt{5}$. Найдите длину стороны ABC с точностью до 3 знака после запятой.

Ответ: 3 04.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^3$ делится на $70!$.

Ответ: 67.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение НОД$(a^2-3,\ b^2-a,\ b-5)$.

Ответ: 622.

3. Простое число p называется *чиселком*, если существует такое натуральное число n, что $8p=[\frac{n^2}{8}]$. Найдите сумму всех чиселок.

Ответ: 25.

4. Дано 372-значное число $N = 185185\ldots185$. Найдите какое-нибудь натуральное число x, имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на x^2+x+1.

Ответ: например, $10^{31}-1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $3^{(5^2)} : (3^5)^2 = (3^5)^x$.

Ответ: 3.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^3\} = \{\sqrt{x}\}$ на промежутке $[0, 100]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a.

Ответ: 999 992.

3. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = |\ldots\big||\ldots| - x^2 + 6x + a| - 2| - 2\big|\ldots\big| - 2$$

(2018 пар $|\ldots|$) имеет нечётное число корней.

Ответ: -4045.

4. Пусть $A = \{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \ldots, \frac{8^{1000}}{9^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений различных элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 38,1.