9–11 класс, 1 отбор

Алгебра

1. Квадратный трёхчлен x^2-7x+b имеет два корня. Если один из них увеличить в два раза, а другой уменьшить в два раза, то получившиеся числа будут корнями трёхчлена x^2-8x+b. Найдите b.

2. При каком наибольшем значении параметра a для любых $x, y \in (0, 2a]$ выполнено неравенство

$$x^3+y^3 \leqslant \frac{a^2}{x+y}?$$

3. На планете Ялмез сутки длятся 24 часа. На 50-й параллели южной широты с постоянной скоростью дуют сильные западные ветра. На этой широте на равных расстояниях друг от друга стоят три города. Если самолёт вылетит в 6 часов утра из какого-то города и полетит строго на запад, он приземлится в следующем городе в 10 часов утра, а если вылетит в 6 часов утра и полетит на восток, то в следующем городе приземлится в полночь. Ранее указанное время — местное для каждого города, все перелёты занимают меньше суток. Во сколько раз скорость самолёта больше скорости ветра?

4. Найдите наименьшее положительное число x, для которого выполнено равенство

$$\frac{101}{x^2(x+1)^2}+\frac{103}{(x+1)^2(x+2)^2}+\frac{105}{(x+2)^2(x+3)^2}+\ldots+\frac{199}{(x+49)^2(x+50)^2}=\frac{3}{10000}.$$

Комбинаторика

1. Андрей и Коля выписали несколько четырехзначных чисел. Андрей выписал все такие числа, у которых первая цифра равна сумме трех других, а Коля все такие, у которых последняя цифра равна сумме трех других. Оказалось, что Андрей выписал больше чисел, чем Коля. На сколько?

2. Сколько существует способов вырезать по линиям сетки прямоугольник из доски 10×10 таким образом, чтобы он содержал в себе шестую клетку третьей строки и четвертую клетку шестой строки, но при этом не содержал седьмую клетку восьмой строки?

3. Изначально на столе есть кучка из 1 000 000 000 спичек. Каждый ход Вася берет по одной спичке из каждой кучки и складывает из взятых спичек новую кучку. Через сколько ходов на столе впервые появится кучка из 100 спичек?

4. Устройство iCalc содержит экран с одним числом x и две кнопки. При нажатии на левую кнопку число x заменяется на $\lfloor x/2 \rfloor$, а при нажатии на правую — на $4x+1$. Вначале на экране высвечивается число 0. Сколько натуральных чисел, меньших 2017, может быть получено в результате произвольной последовательности нажатий? (В промежуточных результатах могут возникать и числа, большие 2017.)

Геометрия

1. Стороны остроугольного треугольника — целые числа 6, 8 и x. Найдите сумму всевозможных значений x.

2. Дан квадрат со стороной 2. Проведены четыре окружности с центрами в вершинах квадрата, каждая из них проходит через центр квадрата O. Пятая окружность с центром в O касается всех четырех окружностей. Чему равна площадь части круга, ограниченного пятой окружностью, которая не попадает в первые четыре окружности.

3. В треугольнике со сторонами 8, 5 и 5 проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника, каждая из которых делит его площадь пополам. Найдите площадь треугольника, образованного этими прямыми.

4. $ABCD$ и $BCDE$ — равнобедренные трапеции (BC параллельно AD и CD параллельно BE). Точка O — точка пересечения BE и AD. Известно, что $CA=5$, $DE=3$, $OE=1$. Найдите AE.

Теория чисел

1. Отношение двух натуральных чисел равно $\frac{25}{12}$, а их наименьшее общее кратное — квадрату их наибольшего общего делителя. Найдите меньшее из этих чисел.

2. Для натурального четного $x > 10$ укажите натуральное число y, такое, что $x < y < 2x^2 + x + 1$ и $2y^2 + y + 1$ делится на $2x^2 + x + 1$. (Ответ можно давать в виде выражения, содержащего x.)

3. Назовём хорошим числом степень двойки (с натуральным показателем), не являющуюся кубом натурального числа. Найдите наименьшее натуральное число, кратное семи, представимое в виде суммы попарно различных хороших чисел.

4. Миша перемножил 5 различных простых чисел a, b, c, d, e и получил число N. Затем он выписал все варианты представления N в виде произведения трёх натуральных множителей (варианты, отличающиеся порядком множителей, например, выражения $1 \cdot 1 \cdot N$ и $N \cdot 1 \cdot 1$, считаются различными) и нашёл сумму всех выписанных множителей. Найдите ее и Вы.