Первый отборочный тур олимпиады ЮМШ

Алгебра и математический анализ.

1. Сколько вещественных решений имеет уравнение

$$|x-1| = |x-2| + |x-3|?$$

2. Какое минимальное значение (в зависимости от значения параметра m) может принимать сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (2m+1)x - 2.5m^2 - m = 2?$$

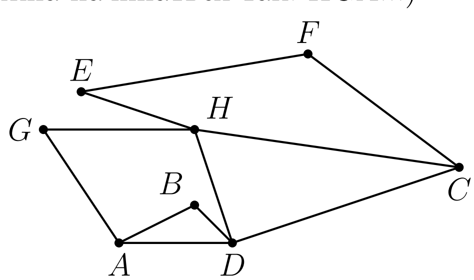
3. Пусть $P(x)$ — многочлен четвертой степени с единичным старшим коэффициентом, для которого $P(-1) = -1$, $P(2) = -4$, $P(-3) = -9$, $P(4) = -16$. Найдите $P(1)$.

4. Найдите $f(-2)$, если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $x \neq 0$

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2f(x)}{x} = x^2.$$

Дискретный Вася.

1. Вася хочет обвести картинку, не отрывая ручки от листа и не обводя никакой отрезок дважды. Укажите какой-нибудь порядок обхода. (Все возможные порядки перечислять не нужно. Например, если ваш обход начинается в букве H, а дальше идет по отрезку GH, то запись должна начинаться так: HGA...)



2. Помогите Васе найти четырехзначное число, которое выражается в виде суммы двух квадратов натуральных чисел не менее чем двумя способами.

3. Вася хочет как можно дольше выписывать натуральные делители числа 30030 (включая единицу и число) так, чтобы отношение любых

двух соседних делителей было простым числом. Сколько делителей он сможет так выписать?

4. Вася нарисовал двудольный граф, долями которого являются двух- и трехэлементные подмножества некоего 20-элементного подмножества, а ребра соединяют пересекающиеся подмножества из разных долей. Сколько всего ребер нарисовал Вася?

Геометрические мотивы.

1. Квадрат и правильный шестиугольник имеют равные стороны. Площадь квадрата равна $\sqrt{12}$. Найдите площадь шестиугольника.

2. Найдите длину XD, если $XA = 15$, $XB = 7$, $XC = 20$ и $ABCD$ – квадрат.

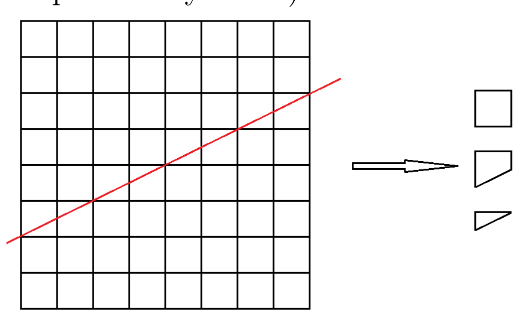
3. Углы A и B бумажного прямоугольника $ABCD$ ($AB = 18$, $AD = 15$) загнули внутрь так, что точки A и B совместились. Найдите площадь получившейся трапеции.

4. Длины сторон треугольника равны $AB = 65$, $BC = 33$, $AC = 56$. Найдите радиус окружности, которая касается двух сторон AC и BC и описанной окружности треугольника ABC.

Олимпиадная смесь.

1. Для какого минимального натурального n верно утверждение "Если рассадить n кроликов по 13 клеткам, то обязательно найдутся три клетки, в которых суммарно будет не меньше 13 кроликов"?

2. Шоколадку из квадратных долек (8×8) разрезали ножом по прямой на два куска, а потом разломали каждый кусок на отдельные дольки. Какое максимальное количество неравных кусочков могло при этом получиться? (Например, в случае, показанном на рисунке, получаются три неравных кусочка.)



3. На дискотеке были юноши и девушки — вместе 100 человек. На каждом медленном танце некоторые из них танцевали друг с другом (в каждой паре партнёры разного пола, в течение одного танца пары не меняются; каждая пара танцует вместе не больше одного танца за всю дискотеку). Оказалось, что все юноши танцевали с разным количеством девушек (в том числе, возможно, с нулевым), а вот все девушки танцевали с одинаковым количеством юношей. Какое минимальное количество медленных танцев могло быть на дискотеке?

4. Назовём слабым ферзём шахматную фигуру, которая бьёт как ферзь, но только на две клетки в каждом направлении (таким образом, она может бить максимум 16 клеток). Какое наибольшее целое количество миллионов слабых ферзей, не бьющих друг друга, можно поставить на доске 30000×30000? (Например, если Вы считаете, что 49 миллионов поставить можно, а 50 миллионов уже нельзя, то ответьте 49.)