

Если в ответе выходит нецелое число, округлите его до десятых.

Алгебра

10. Напишите наибольшее натуральное решение уравнения

$$(n + 2)! - (n + 1)! - n! = n^2 + n^4.$$

Ответ. 3.

20. В многочлене $ax^4 + bx^3 + 4x^2 + dx + l$ коэффициенты a , b и 4 образуют геометрическую прогрессию, а 4, a и b — арифметическую. Многочлен делится на $1 + x + x^2$. Найдите частное от деления первого многочлена на второй, при $b \geq 0$.

Ответ. $4x^2$.

30. Для скольких интервалов верно неравенство $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} + \frac{1}{6+x} - \frac{1}{7+x} > 0$?

Ответ. 5.

40. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 3, 5. Сумма квадратов тех же членов равна 5, 25. Какое наименьшее значение может приобретать знаменатель этой прогрессии?

Ответ. 0,5.

Комбинаторика

10. Дано клеточное поле 7×7 и марсоход «Кьюриосити», который умеет ходить только по клеточкам и только на две вправо или одну вниз. В каждом направлении он может двигаться не более двух раз подряд. Из какого количества клеток нельзя добраться до правого нижнего угла?

Ответ. 28.

20. В каждую клетку квадрата 10×10 поставили знак $+$ или $-$, так что произведение всех знаков в каждой строке и каждом столбце было положительно. Сколькими способами это можно было сделать?

Ответ. 2^{81} .

30. У африканского племени вместо денег используются ожерелья из не более чем пяти цветных бусин, бусины различаются только цветом. Стоимость ожерелья равна количеству различных конфигураций, которые можно получить, переставив бусины на нитке; конфигурации, отличающиеся поворотом или переворотом бус, считаются одинаковыми. Найдите сумму чисел, меньших десяти и таких, что они не являются стоимостью никакой нитки бус.

Ответ. 43.

40. Банк города Анк-Морпорк выпускает монеты с буквой V на одной стороне и буквой H на другой стороне. Лорд Витинари разложил 8 монет в ряд слева направо. Он последовательно производит следующую операцию: если в ряду ровно $k > 0$ монет лежат буквой H кверху, то он переворачивает k -ую слева монету; иначе все монеты лежат буквой V кверху, и он останавливается. Например, если для трех монет и конфигурации VHV , последовательность операций выглядела бы как $VHV \rightarrow HHV \rightarrow HVV \rightarrow VVV$, то есть процесс остановился бы после трех операций. Для каждой начальной конфигурации C через $L(C)$ обозначим количество операций, после которых процесс остановится. Например, $L(VHV) = 3$, а $L(VVV) = 0$. Найдите среднее арифметическое значение $L(C)$, когда C пробегает все 2^8 возможных начальных конфигураций.

Ответ. 18.

Теория чисел

10. Составьте из четырёх различных цифр наибольшее четырёхзначное число, которое не делится ни на одну из своих цифр.

Ответ. 9874.

20. Приведите пример натуральных $a, b, c > 10^8$ (не обязательно различных), для которых выполняется равенство $a^3 + b^3 = c^4$.

Ответ. Например, подойдут числа $a = b = 2 \cdot 10^{12}$, $c = 2 \cdot 10^9$.

30. Найдите наибольшее натуральное n , такое что $((2020!)!)!$ делится на $((n!)!)!$.

Ответ. 6.

40. Найдите последние две цифры числа $\left[\frac{10^{10000}}{10^{100}-7} \right]$ ($[x]$ означает целую часть x).

Ответ. 43 .

Геометрия

10. На плоскости дан треугольник ABC . Сколько существует точек, равноудаленных от прямых AB , BC и AC ?

Ответ. 4.

20. Правильный треугольник и квадрат имеют равные стороны. Площадь треугольника равна $\sqrt{2}$. Найдите площадь квадрата.

Ответ. 3,3.

30. Дан треугольник ABC со сторонами $AC = 1$, $BC = 4$ и углом C , равным 45° , I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Через I , B и C провели окружность. Найдите ее радиус.

Ответ. 4,2.

40. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной 1. Чему равен минимум выражения

$$MA + MB - MC,$$

где M — точка на плоскости?

Ответ. 0.