Олимпиада ЮМШ 2020-21 года

Код участника: 1116

Лист подготовки устного ответа

Лист № 1

Фиксация санитарных выходов:

1 выход:	13:16.	возвращение:	13:18.
2 выход:		возвращение:	
3 выход:		возвращение:	
4 выход:		возвращение:	
5 выход:		возвращение:	

Время окончания: 15:43.

Всего листов: 4

~~N11~~

$2^{10}=1024$

$2^{11}=2048$

$2^{12}=4096.$

$n \le n! - 4^n \le 4n.$

$2^{20} \le 10!$

$2^{20} \le 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10.$

$2^{12} \le 1\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 5$

$n+4^n \le n!$

$n+\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 \ldots 4}_{n} \le 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \ldots n.$

$n=10:$ $10+4^{10} \le 10!$ $\quad 2^{20} \le 10(9!-1)$

$4^{10} \le 10(9!-1).$

$\cancel{4^{8} \le 9!-1}$ $\quad 4^{9} \le$

$\cancel{4^{8} \le 8!}$

225
63
675
1350
14175

$2^{20} \le 10(9!-1)$ $\quad 10(9!-1) \ge 2^3\cdot(1\cdot 2\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^3) =$

$=$

$2^{20} \le 2^{10}(9!-1)$

$9!-1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$

$1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3.$

$2^{22} \le 11! - 11 = 11(10!-1) \ge 2^3(1\cdot 2\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3) \ge 2^{22}$

$2^{2n} \le n((n-1)!-1)$

$2^{2n+2} \le (n+1)(n!-1).$

добавилось степень $+2$, а справа добавило $\ge 3 \Rightarrow$ справа больше

$\boxed{\text{для } n \ge 10 \text{ — уд}}$

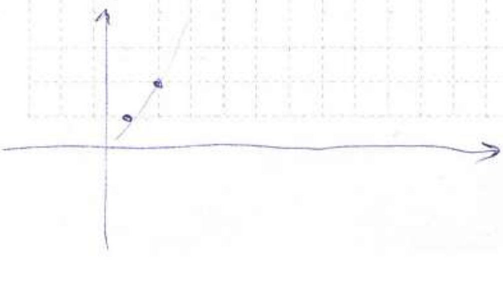
$n!-4^n \le 4n.$

$n! \le 4^n+4n$

$f(n)=4^n+4n$

$f'(n)=4^n\cdot\ln 4+4.$

$f''(n)=4^n\ln^2 4 > 0 \Rightarrow$ выпукл. вниз.



$n! - 4^n \leq 4n$. $n=10$

$n! \leq 4^n + 4n$

$10! \leq 4^{10} + 40$.

$9\cdot10\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 \leq 2^{17} \cancel{+5}$

$9\cdot7\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3 \leq 2^{12}$

$14175 \leq 4056 + ..$

$n=100$

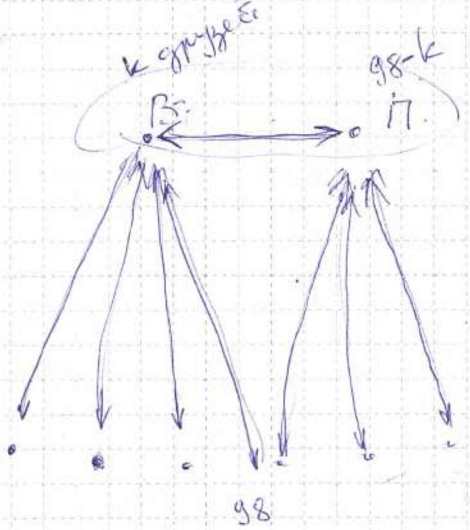
$100! \leq 2^{200} + 400$

$100|2$, $50|2$, $25|2$, $12|2$, $6|2$, $3|2$, 1

$100|4$, 25

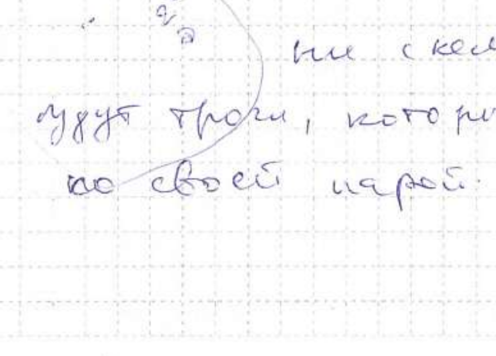
$75+22 =$
$= 97$.

$100! \leq 4^{100} + 400$.



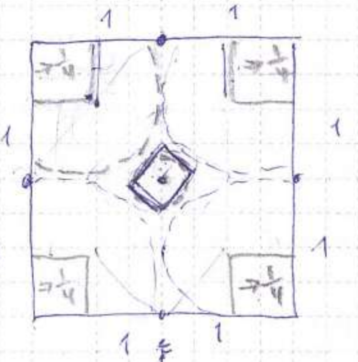
Пусть В и П не дружат, тогда
А − стр. общ из 2 человек =>
В и П дружат
Если взять любое множество,
где есть В и П, то оно
будет общ.

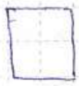
Возьмем мальчика, у которого ≥ 49 друзей. Тогда
берем группу из этого мальчика и
троих, которые дружат с другим мальчиком.
Эта группа будет общ.



− если j и i дружат, то
убираем одного.
В итоге получим множество,
где никто не дружит
ни с кем, при этом вне этого множества
будут трои, которые дружат с В/П или с
по своей парой. − ч.т.д.

Код участника: 1116 Лист подготовки ответа Лист № 2

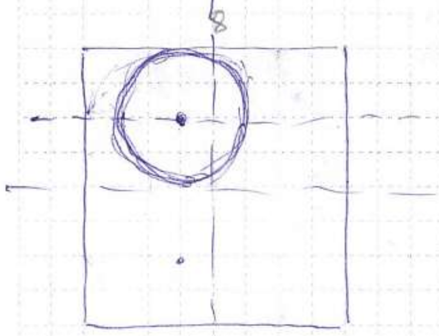




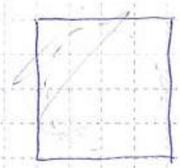
$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2 \to 8$
$1 \to 4$
$S_1 \to S\ 16$
$S_2 \to 32$
$S_{\frac{1}{2}} \to 8$

$S \geq \frac{1}{2}$



$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$



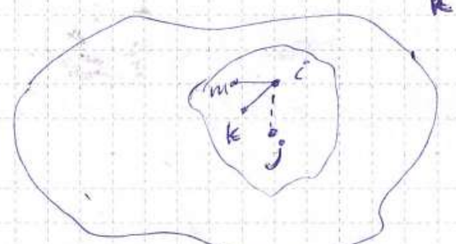
$4\pi > 8$

$\pi\ \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\pi$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \quad \frac{\pi}{8}$

k

A B C D



Если никто не дружит, то все хорошо

1) Если кто-то дружит со всеми, то убираем его.

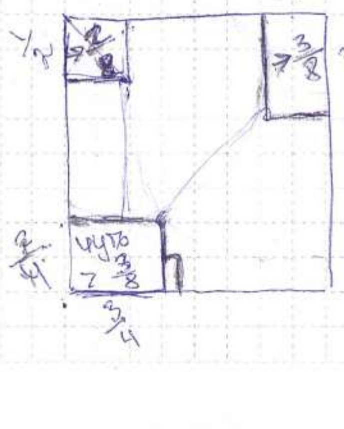
2) если есть цикл друзей, то разрываем его.

3) Находим пару друзей и одного убираем.

4) ~~Если есть~~ Прост. человек, ~~которого ни с кем не~~

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$



$\sqrt{\frac{4}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}}$

$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} > 1 \qquad \sqrt{\frac{18}{16}}$

3д.

$n \le n! - 4^n \le 4n$

$n! \le 4n + 4^n$

$n \geq 10$ $\quad 10! \le 4\cdot 10 + 4^{10} = 4(4^9 + 10)$

$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \le (4^9+10)\cdot \cancel{4}$

$2\cdot 5\cdot 9\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 2 \le 2^{18} + 10$

$5\cdot 9\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot \cancel{2} \le 2^{12} + \frac{10}{2^6}$ — не уд.

$\cancel{4}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \cdots n \le \cancel{4}(4^{n-1} + n)$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \cdots n \le 4^{n-1} + n$

$\le 2^{2n-2} + n$

$2^{12} = 4096$

$2^{13} = 8192$

$2^{14} = 16384$

$11! \le 4\cdot 11 + 2^{22}$

$11\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 3 \le 2^{14} + \frac{4\cdot 11}{2^8}$

$11\cdot 14175 \le 16384 + \frac{11}{2^6}$

Пусть для $n = k$ — не работает.

$k! > 4\cdot k + 2^{2k}$

$k!\cdot(k+1) > 4(k+1) + 2^{2k}\cdot 2^2$

$k! > (4k + 4^k)$ — уд

$k!\cdot(k+1) > 4k + 4 + 4^k\cdot 4$

~~$k!\cdot k + k! > 4k + 4^k\cdot 4 + 4$~~

$k!\cdot(k+1) > 4k + 4^k\cdot 4 + 4$

$(k+1)! > (4k+4^k)(k+1) = 4k^2 + 4k + 4^k\cdot k + 4^k =$

$= 4k + 4^k(k+1) + 4k^2 \quad \vee \quad 4^k\cdot 4 + 4k + 4$

3) Пусть найдутся 10 прог., которые дружат между собой.

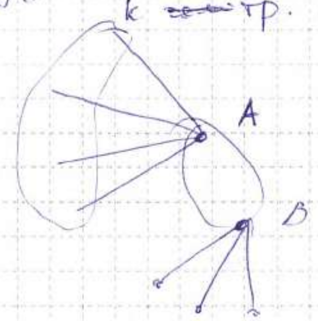
А. $\qquad$ Б

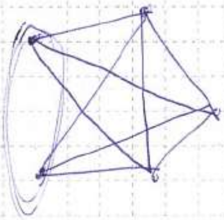
Код участника: 1116

Лист подготовки ответа

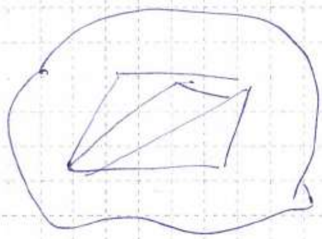
A – max друзей.

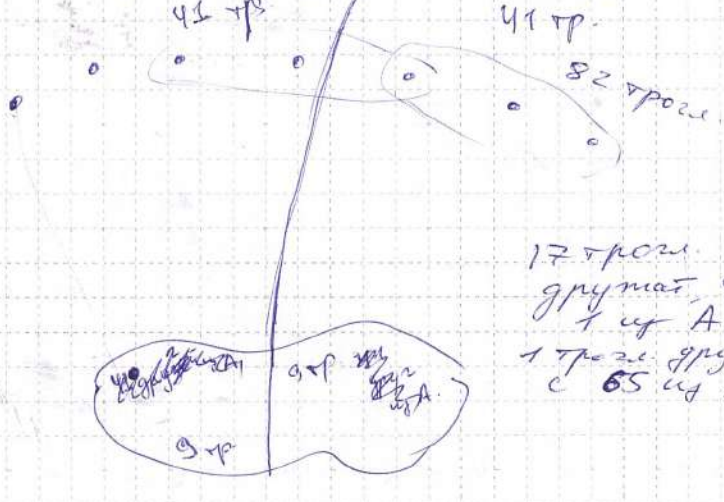
k друзей.



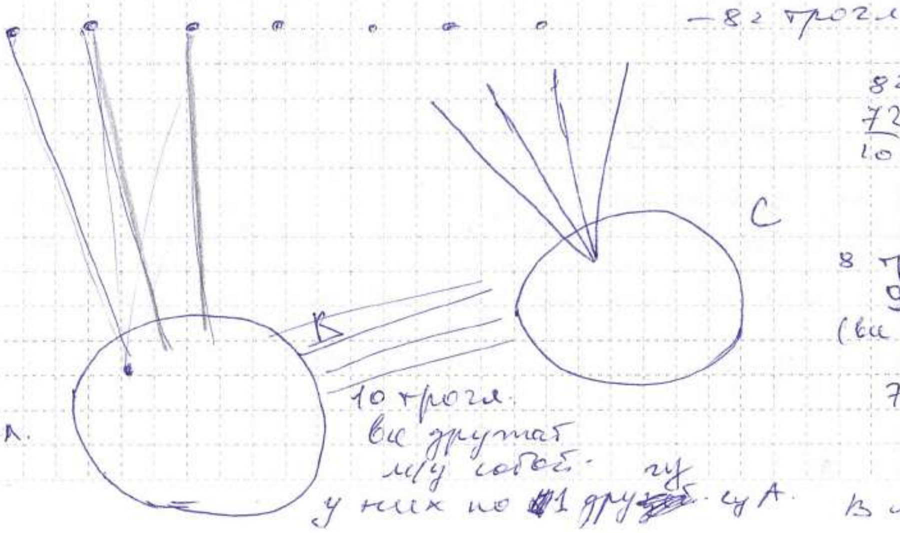


18 тр., которые все дружат между собой.





17 прогл. дружат с 1 из A.
1 прогл. дружит с 65 из A.



$$\begin{array}{r|l} 82 & 18 \\ \underline{72} & 4 \\ 10 & \end{array}$$

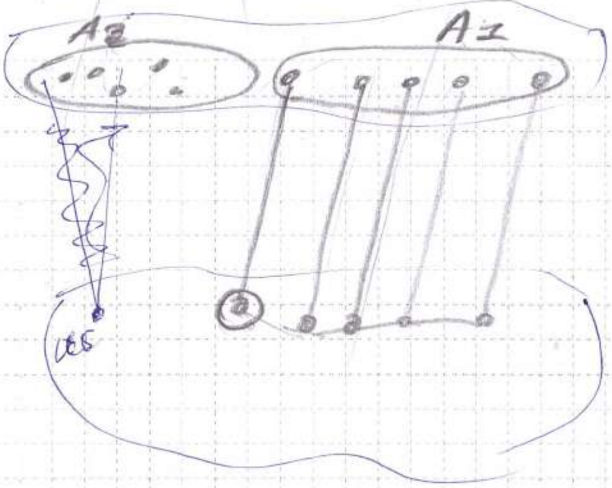
8 прогл. по 9 друзей из A. (все дружат)

$$\begin{array}{r|l} 72 & 8 \\ & 9 \end{array}$$

18 прогл.

10 прогл. все дружат м/у собой. У них по 1 другу из A.

B и C – все дружат

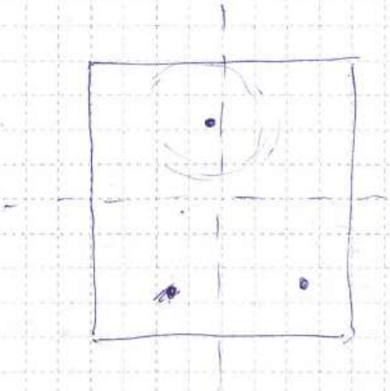


A , 82 трогл.

B - 18 трогл (все дружат)

Пусть 1 из B т.к. A_2 ни с кем не дружит $\Rightarrow A_2 \subset A'$

$S(A) \leq 2.$



$\pi \cdot \frac{1}{4}$

3,14 | 2
2 1,5
1,1
10

$n \leq n! - k^n \leq kn$

$n! \leq kn + k^n$

$k = 4$ - решений нет.
$k = 5$ - не ув.

$n! \leq 5n + 5^n$

$10! \leq 50 + 5^{10}$

$2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \leq 2 + 5^8$

$11 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 24 \leq 2 + 25^4 \cdot 5$

$5^2 = 25$
$5^3 = 125$
$5^4 = 625$
$5^5 = 3125$
$5^6 = 15625$

$k = 6!$ $\quad n \leq n! - 6^n \leq 6n.$

$n! \leq 6n + 6^n$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \leq 6 \cdot 10 + 6^{10} = 6 \cdot 10 + 36^5$

$10 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 30 \leq 60 + 36^5 - 48$

$10 \cdot 11 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 30 \leq 11 + 36^5 \cdot 6$

$t\ m! \leq 6 \cdot m + 6^m$

$(m+1)! \leq (6m + 6^m)(m+1) = 6m^2 + 6m + 6^m \cdot m + 6^m \leq$

$\cancel{6m} + 6^m(m+1) + 6m^2 \leq \cancel{6m} + 6 + 6^m \cdot 6$

Код участника: 1116 Лист подготовки ответа Лист № 4

$n+k^n \le n! \le kn+k^n$

$k=6 \quad n+6^n \le n! \le 6n+6^n$

~~m+1~~ $m! > km + k^m$

$(m+1)! > km^2 + km + k^m(m+1) >$

$> \cancel{km}+k+k^m \cdot k$

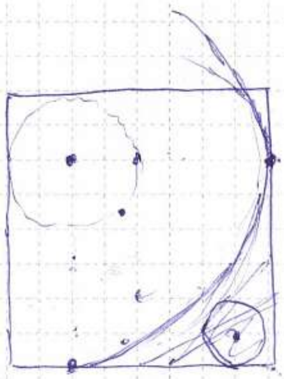
$10! =$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 3628800$

$720 \cdot 7 = 5040$
$5040 \cdot 8 = 40320$
$40320 \cdot 9 = 362880$

$2^{10} \cdot 3^{10}$
1024
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
$3^7 = 2187$
$3^8 = 6561$
3^9

A . . Б

C



$\frac{1}{4}\pi \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$

$\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{5\sqrt{2}-3}{4}$

$\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{16}\pi = \pi\cdot\frac{5}{16}$

$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$

$\left(\frac{3}{4}(\sqrt{2}-1)\right)^2\cdot\pi+\frac{1}{4}\pi$

$\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{16}(3-2\sqrt{2})\right)=\pi\left(\frac{31-18\sqrt{2}}{16}\right) \vee 1,14$

$1,14 \cdot 16 = 684$, 114, $18,24$

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8}=\frac{2\pi+3}{8}$

$1,42 \cdot 32$: 284, 426, $45,44$

$1,42 \cdot 18$: 1136, 142, $25,56$

$31-25,56=5,44$

$3,14\cdot 2=6,28+3=\frac{9,28}{8}$

$1\frac{128}{800} \vee 1,\frac{14}{100}$

$3:1,4=4,2 \qquad 3,14\cdot 5,44 \vee 18,24$

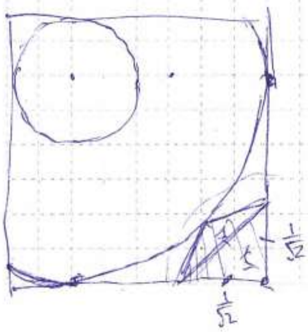
$1,2+3,14=\frac{4,34}{4}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{3}{4}$

$1\frac{34}{400} \vee \frac{14}{100}$

$3,14 \cdot 5,44$: 1256, 1256, 1570

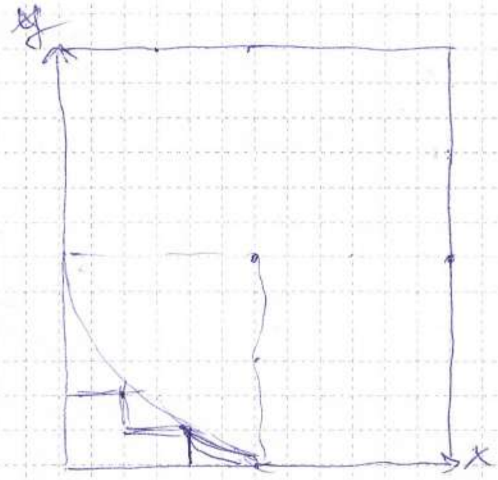


$\frac{1}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot\frac{1}{2} =$

$=\frac{3\sqrt{2}-3-1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{3\sqrt{2}-3}{4}+\frac{\pi}{4}$



$(x-6)^2+(y-6)^2=6.$

$(y-6)^{2}=\sqrt{6-(x-6)^2}$

$y=6+\sqrt{6-(x-6)^2}$

$y=6+\sqrt{-x^2+12x-30}$