Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
9 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

По кругу стоят, чередуясь, зайки с котиками, по n штук каждого вида. Зайка умеет превращать своих соседей (заек в котиков, котиков в заек), но может это делать лишь с обоими соседями одновременно. Котики превращать соседей не умеют.

1.1. Пусть $n = 2022$. Можно ли добиться расстановки, в которой стоят подряд 2022 зайки, а затем 2022 котика?

1.2. Пусть $n > 10$. Можно ли добиться того, что в круге останется четыре стоящие подряд зайки (а остальные будут котиками)?

Сюжет 2.

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На меньшей дуге BC его описанной окружности выбирается переменная точка D. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC. Луч CD' пересекает отрезок AB в точке E. Луч BD' пересекает отрезок AC в точке F.

2.1. Докажите, что точка D' лежит на описанной окружности ω треугольника AEF;

2.2. Оказалось, что описанная окружность треугольника ABC касается ω. Докажите, что в четырёхугольнике $AED'F$ одна из диагоналей проходит через середину другой.

Сюжет 3.

P — некий полином с целыми коэффициентами, A и M — целые числа. Построим последовательность a_n, где $a_1 = A$, и $a_{n+1} = P(a_n)$ и пусть r_n — остаток от деления a_n на M.

3.1. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$, $A = 1$, $M = 3^{2022}$. Докажите, что период последовательности r_n (то есть, такое наименьшее t, что $r_{n+t} = r_n$ при достаточно больших n) равен 2.

3.2. Найдите длину предпериода той же последовательности (то есть такое наибольшее n, что $a_{n+t} \neq a_n$, где t — период).

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

По кругу стоят, чередуясь, зайки с котиками, по n штук каждого вида. Зайка умеет превращать своих соседей (заек в котиков, котиков в заек), но может это делать лишь с обоими соседями одновременно. Котики превращать соседей не умеют.

1.3. Пусть $n = 2021$. Сколько различных расстановок можно получить?

1.4. Пусть $n = 2022$. Сколько различных расстановок можно получить?

Сюжет 2.

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На меньшей дуге BC его описанной окружности выбирается переменная точка D. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC. Луч CD' пересекает отрезок AB в точке E. Луч BD' пересекает отрезок AC в точке F.

2.3. Известно, что в положении $D = D_1$ центр окружности ω лежит на отрезке AB, а в положении $D = D_2$ — на стороне AC. Отрезки BD_2 и CD_1 пересекаются в точке X. Докажите, что прямые AX и BC перпендикулярны.

2.4. Окружность ω вторично пересекает окружность ABC в точке G. Докажите, что прямая $D'G$ проходит через фиксированную точку.

Сюжет 3.

P — некий полином с целыми коэффициентами, A и M — целые числа. Построим последовательность a_n, где $a_1 = A$, и $a_{n+1} = P(a_n)$ и пусть r_n — остаток от деления a_n на M.

3.3. Назовем полином *стабильным по модулю* M, если существует B, такое что для любого A найдется k, для которого $r_k = B$. Докажите, что полином $f = x^3 - x^2 - 2$ нестабилен по модулю M, если M является квадратом нечётного числа.

3.4. Докажите, что многочлен $x^2 - 3x + 12$ стабилен для бесконечного числа натуральных M.