



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
8 класс. Основная аудитория



1. Натуральное число называется *странным*, если среди любых его трёх натуральных делителей можно выбрать два, один из которых делится на другой. Сколько странных делителей имеет число 324000?
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 19^\circ$, $\angle DAC = 19^\circ$, $\angle ABD = 38^\circ$, $\angle CBD = 71^\circ$. Докажите, что $ABCD$ — это трапеция.
3. Можно ли разложить многочлен $x^{12} - 729$ в произведение пяти скобок, каждая из которых является нетривиальным многочленом с целыми коэффициентами?
4. В каждой клетке огромной таблицы записано число — сумма номера строки и номера столбца. Можно ли выбрать две строки и два столбца так, чтобы все четыре числа в их пересечении оказались степенями двойки?



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
8 класс. Основная аудитория



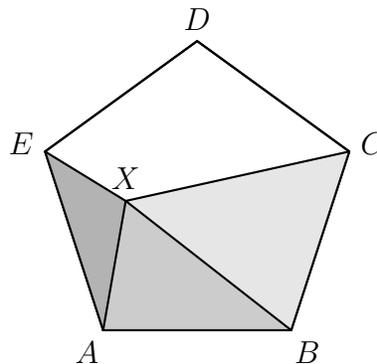
1. Натуральное число называется *странным*, если среди любых его трёх натуральных делителей можно выбрать два, один из которых делится на другой. Сколько странных делителей имеет число 324000?
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 19^\circ$, $\angle DAC = 19^\circ$, $\angle ABD = 38^\circ$, $\angle CBD = 71^\circ$. Докажите, что $ABCD$ — это трапеция.
3. Можно ли разложить многочлен $x^{12} - 729$ в произведение пяти скобок, каждая из которых является нетривиальным многочленом с целыми коэффициентами?
4. В каждой клетке огромной таблицы записано число — сумма номера строки и номера столбца. Можно ли выбрать две строки и два столбца так, чтобы все четыре числа в их пересечении оказались степенями двойки?



Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
8 класс. Выводная аудитория



5. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ выбрана точка X такая, что $S_{EAX} = 1$, $S_{ABX} = 2$, $S_{BCX} = 3$. Найдите площадь четырёхугольника $CDEX$.



6. Какое наибольшее количество фигурок вида  можно вырезать из квадрата 10×10 ?

7. В некоторой роще растут деревья. Деревья называются *соседними*, если их кроны соприкасаются. В этой роще белка может от любого дерева добраться до любого другого дерева, перепрыгивая на соседние деревья.

Роща горит, но её тушат двое пожарных. В каждый момент времени пожарный может тушить только одно дерево. Если какое-то дерево загорается, то огонь моментально распространяется на все соседние деревья, которые не тушат пожарные. Пожарный может тушить любое дерево, но он не может моментально переместиться от дерева к дереву. Поэтому пока пожарный переходит от дерева к дереву, огонь распространяется сразу на все деревья, до которых может дотянуться. Пожарные смогли потушить все деревья в роще.

Докажите, что белка может начать с некоторого внутреннего дерева и посетить все внутренние деревья по одному разу, перепрыгивая на соседние деревья. *Внутренними* называются деревья, у которых два и более соседа.