1. *Чебурашка записал словами все чётные трёхзначные числа («сто, сто два, сто четыре, ..., девятьсот девяносто восемь»), а Незнайка — все нечётные трёхзначные числа. Кто из них написал больше слов и на сколько?*

Решение. Посчитаем, насколько различается количество слов в каждом десятке, то есть для набора чисел вида $AB0, \ldots, AB9$, где A и B — какие-то цифры. Каждое число вида $AB0$ на одно слово короче, чем $AB1$, а остальные пары чисел ($AB2$ и $AB3$, $AB4$ и $AB5$ и т. д.) содержат поровну слов. Исключение составляют десятки вида $A10, \ldots, A19$, где все числа содержат поровну слов. Таким образом, в каждой сотне у Незнайки на 9 слов больше, чем у Чебурашки, а суммарно — на 81 слово.
<u>Ответ: Незнайка написал на 81 слово больше.</u>

Критерии. Полное решение — 4 балла.

Верный ответ 81 без обоснования — 1 балл.

Для решений с прямым подсчётом слов, написанных каждым. Решение вида «у одного 1260 слов, у другого 1179, поэтому на 81 слово больше» (без объяснения, почему 1260 и 1179) — 1 балл. За недостаточно подробное пояснение могут сниматься баллы.

Верно подсчитано количество слов только у одного — 2 балла.

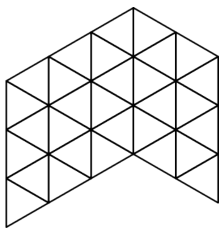
Для решений с сопоставлением чисел.

Всё верно, но не учтено, то десятки «...десять — ...девятнадцать» отличаются от остальных (в результате ответ «90 слов») — 2 балла.

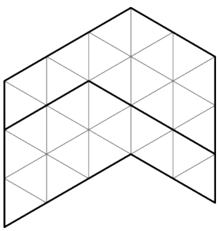
Ответ «90 слов» с обоснованием «десять сотен и в каждой по 9 слов» (описано почему) — тоже 2 балла.

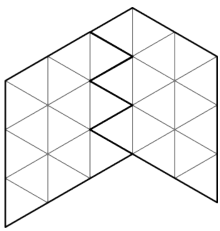
Решение, в котором вместо подсчёта слов доказано, что они написали поровну *чисел* — 0 баллов.

2. *а) Покажите, как разрезать нарисованную справа фигуру по линиям на две равные (по форме и размеру) части.*
б) Покажите, как это сделать это ещё одним способом.



Решение.





Критерии. Полное решение — 4 балла.

По 2 балла за каждый верный вариант (в частности, если из двух вариантов один верный, то 2 балла).

Приведены два верных варианта и ещё неверный — 3 балла.

Треугольники могут быть нарисованы криво, с деформацией и т.д. — это неважно (если их правильное количество и они верно расположены). Ошибка при перерисовке типа лишнего или пропущенного столбца (или строки) — минус балл.

3. *На фестиваль «Хоббиты — за культурное разнообразие!» прибыло более* 20 *участников. Корреспондент обнаружил, что среди любых* 15 *участников фестиваля найдётся не менее* 4 *людей и не менее* 5 *эльфов. Сколько хоббитов приняло участие в фестивале? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет.*

Решение. Предположим, что есть хотя бы один хоббит. Если среди участников наберется 10 людей, то в их компании с хоббитом и еще 4 любыми участниками не найдется 5 эльфов, что противоречит условию. Значит, людей не более 9. Поскольку всего участников более 20, то найдутся 12 участников, не являющихся людьми. Но тогда, добавив к ним 3 участников, получим компанию, противоречащую условию. А это означает, что хоббитов не было вовсе.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Если доказано, что при наличии хоббитов не больше 9 людей — 2 балла (если только упомянуто, но не доказано, то 1 балл). Ещё 1 балл, если указано, что при наличии хоббитов есть хотя бы 12 «нелюдей».

Решение вида «Всего 21 участник: 10 людей и 11 эльфов» (и всё) — 1 балл (на самом деле это единственный пример, удовлетворяющий условию задачи).

Решение, в котором подразумевается, что люди и эльфы тоже являеются хоббитами — не более 2 баллов. В частности, если упомянуто, что людей не более 10 и эльфов не более 11, то 1 балл, если это доказано, то 2 балла.

4. *Петя придумал два трёхзначных числа УРА и ЮМШ, причём все цифры У, Р, А, Ю, М, Ш различны и не равны нулю. Посчитав произведение УРА·Ю·ММ·ШШШ, он обнаружил, что оно равно квадрату целого числа. Чему может равняться число ЮМШ, если его цифры расположены в порядке возрастания? Найдите все возможные варианты.*

Решение. Заметим, что ММ · ШШШ = 11 · 3 · 37 · М · Ш. Тогда

$$\text{УРА} \cdot \text{Ю} \cdot \text{ММ} \cdot \text{ШШШ} = (11 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x)^2$$

для какого-то натурального x. Значит,

$$\text{УРА} \cdot \text{Ю} \cdot \text{М} \cdot \text{Ш} = 11 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x^2.$$

Поскольку $Ю \cdot М \cdot Ш$, будучи произведением цифр, не делится ни на 11, ни на 37, то УРА должно делиться на $37 \cdot 11 = 407$, то есть УРА равно 407 или 814. Поскольку нули запрещены, то УРА $= 814$.

Значит, $2 \cdot Ю \cdot М \cdot Ш = 3 \cdot x^2$. Поэтому в разложении $Ю \cdot М \cdot Ш$ нечётное количество двоек и нечётное количество троек (а других простых множителей чётное количество). Цифры 1, 4, 8 уже использованы, остались 2, 3, 5, 6, 7, 9. Цифры 5 и 7 не подходят, так как привносят в разложение множители 5 (или 7) в первой степени. Из оставшихся цифр, как видно, подходит только набор 2, 3, 9. Поскольку цифры должны быть расположены по возрастанию, то <u>ЮМШ = 239.</u>

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Распределение баллов (по 1 баллу за каждый пункт, за последний — 2 балла):
(1) Произведение из условия делится на 11 и 37 (или: ММ делится на 11, а ШШШ на 37).
(2) Значит, УРА делится на 11 и 37,
(3) потому что $УРА \cdot Ю \cdot М \cdot Ш \cdot 11 \cdot 37$ — квадрат, но Ю, М, Ш не делятся ни на 11, ни на 37.
(4) УРА $= 407$ или 814, но 407 не подходит.
(5) ЮМШ $= 239$ (и только),
(6-7) потому что <любое корректное обоснование, например, перебор>. Заметим, что рассуждение «поскольку $Ю \cdot М \cdot Ш$ должно делиться на 2 и на 3, то среди цифр этого числа есть 2 и 3» не является корректным: например, вместо этого одна из цифр может равняться 6.

Только ответ 239 — 1 балл.

5. *На учениях «Путь к миру–*2017*» по кругу расположены* 2017 *воронок, в одной из которых прячется враг. Артиллерия может залпом обстрелять некоторые (но не все) воронки, после чего враг переползает в следующую по часовой стрелке. При этом ни в какую воронку нельзя стрелять дважды. Какое наименьшее число залпов нужно дать артиллеристам, чтобы гарантированно поразить врага? Не забудьте доказать, что оно наименьшее.*

Решение. <u>Ответ: 3 залпа.</u>

Оценка. Двух залпов мало: после первого залпа найдётся необстрелянная воронка А, после которой (по часовой стрелке) идёт обстрелянная воронка Б. Если враг находился в А, то после первого залпа он перейдёт в Б и не будет убит вторым залпом.

Пример. Пронумеруем воронки по часовой стрелке от 1 до 2017. Можно убить врага, например, такими тремя залпами.

- Залп 1: воронки 2, 4, 6, ..., 2014, 2016. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2016.

- Залп 2: воронка 1. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 3, 5, 7, ..., 2017.

- Залп 3: воронки 3, 5, 7, ..., 2017. Теперь враг гарантированно убит.

Существуют и другие примеры.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Доказательство, что меньше 3 выстрелов не хватит — 3 балла.

Пример, как сделать за 3 выстрела, — 3 балла. Обоснование, почему пример подходит, не требуется.

Только ответ «3 залпа» — 1 балл (если он не возник случайно в результате неверного рассуждения).

6. *В наборе были гирьки весом в 5, 24 и 67 г, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и вес оказался равен 363636363636363636 граммам.*
а) Докажите, что более 10 гирек потеряно.
б) Какое минимальное количество гирек могло быть потеряно?

Решение. а) Если ни одна гирька не потеряна, то суммарный вес должен делиться на 24, а он имеет остаток 12 от деления на 24 (т. к. делится на 3 и на 4, но не на 8). Значит, суммарный вес потерянных гирь тоже имеет остаток 12 от деления на 24. Поймём, как получить остаток 12 наименьшим количеством (потерянных) гирь. Можно считать, что не потеряна ни одна 24-граммовая гиря и не потеряна пара гирь $5 + 67$, т. к. ни то, ни другое не меняет остатка от деления на 24. Значит, считаем, что потеряны либо только 5-граммовые гири, либо только 67-граммовые. Любых из них нужно хотя бы 12.

б) Из пункта (а) видно, что для получения нужного остатка от деления на 24 разность количества 5-граммовых и 67-граммовых потерянных гирь должна быть не менее 12. Значит, если потеряна хотя бы одна пара $5 + 67$, то общее количество потерянных гирь не менее 14.

Перейдём к остаткам от деления на 96. Заметим, что общая масса оставшихся гирь имеет остаток 84 при делении на 96. Значит, суммарная масса потерянных гирь имеет остаток 12. Это не достигается ни потерей только 12 5-граммовых гирь (остаток 60), ни потерей только 12 67-граммовых гирь (остаток 36), ни потерей одного из указанных комплектов и одной 24-граммовой (тогда остаток будет 84 или 48). Значит, число потерянных гирь не менее 14.

А вот если потерять 12 гирь в 5 граммов и две гири по 24 грамма, то масса потерянных гирь как раз будет иметь остаток 12 при делении на 96. Заметим, что массу изначального набора можно сделать любым натуральным числом, кратным 96. Поэтому при подходящем изначальном количестве гирь и при потере 14 указанных гирь можно получить указанную массу. Ответ: 14.

Критерии. Полное решение — 8 баллов $(4 + 4)$.

Указано, что масса одного набора 96 граммов — 1 балл.

Верно указан остаток от деления общей массы на 12 или на 96, после чего начинается перебор наборов потерянных гирь с нужным остатком — ещё 1 балл.

Верный пример того, как потерять 14 гирек — 2 балла.

Важно! Перебор, который окончен суммарной массой потерянных гирь в 108 граммов, «потому что меньше 108 граммов нельзя» — неверное решение, потому что надо минимизировать количество потерянных гирек, а не их массу.

7. *Андрей взял огромную круглую салфетку, согнул её пополам (получился полукруг в два слоя), потом ещё раз пополам (получилась четверть круга в четыре слоя), и так далее. После сотого сгиба получился узкий сектор в* 2^{100} *слоёв. Тогда Андрей развернул круг обратно. Найдите количество пар секторов, которые в развернутом состоянии соседние, а в сложенном между ними ровно* 30 *слоёв.*

Решение. Каждому сгибу (то есть границе между двумя секторами, которые в развёрнутом виде соседние) можно сопоставить «толщину» — количество слоёв между двумя слоями, которые он разделяет. Заметим, что «толщина» сгиба определяется при его формировании и не меняется в дальнейшем. Кроме того, ясно, что при N-м сгибании формируются сгибы всех чётных толщин от 0 до $2^N - 2$ (каждая по одному разу). Значит, сгиб толщины 30 формируется при каждом сгибании, начиная с 5-го. Ответ: 96.

Критерии. Полное решение — 4 балла.

Указано, что первая из пар (или одна из пар) появилась после пятого сворачивания — 1 балл.

Указано (но не доказано), что после этого каждое новое сворачивание добавляет одну подходящую пару, и дан верный ответ — еще 3 балла.