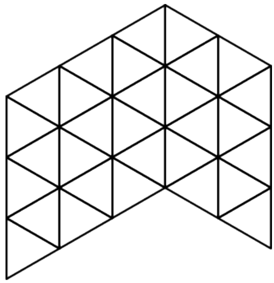
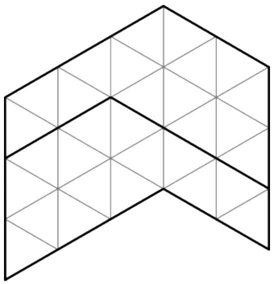
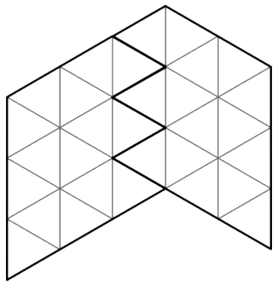
1. *Покажите, как разрезать фигуру по линиям на две равные части. (Части должны совпадать не только по количеству треугольников, но и по форме.)*



Решение. Существует два возможных решения (достаточно было привести хотя бы одно):





Критерии. Верный пример — 3 балла.

Лишний столбец/строчка при перерисовывании фигуры или отсутствие сетки — не более 2 баллов.

2. *На проводе сидят* 1000 *ворон. В конце каждой минуты каждая третья (третья, шестая, девятая и так далее) ворона улетает.*
а) Какими изначально по счету были вороны, которые останутся на проводе в конце концов?
б) Сколько минут пройдет до момента, когда вороны перестанут улетать?

Решение. а) Ясно, что в конце останется не более двух ворон, а первая и вторая никогда не улетают. Значит, это будут именно они. Ответ: 1 и 2.

б) Легко видеть, что количество улетающих в очередную минуту ворон — треть их числа, округляемая вниз. Таким образом, остается всего лишь аккуратно посчитать:

минута	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
было ворон в начале	1000	667	445	297	198	132	88	59
улетит в конце	333	222	128	99	66	44	29	19

минута	9	10	11	12	13	14	15	16	17
было ворон в начале	40	27	18	12	8	6	4	3	2
улетит в конце	13	9	6	4	2	2	1	1	0

Видим, что вороны перестали улетать на 17 минуте, таким образом получаем ответ: 16 минут.

Критерии. Полное решение — 4 балла $(1+3)$.

Правильный ответ в пункте а) — 1 балл.

Только правильный ответ в пункте б) — 1 балл.

За каждую арифметическую ошибку в вычислениях пункта б) снималось по баллу.

3. *Назовем число, состоящее из одинаковых цифр,* красивым. *Любое ли пятизначное число можно представить в виде суммы красивых чисел попарно разной длины?*

Ответ: нет.

Решение (1)**.** Если в требуемой сумме есть число с хотя бы пятью знаками, то результат не меньше 11 111. Иначе он не больше $9+99+999+9999=11\,106$. Таким образом, ни одно из чисел от 11 107 до 11 110 так представить нельзя.

Решение (2)**.** Нужное представление пятизначного числа всегда имеет вид

$$a \cdot 11111 + b \cdot 1111 + c \cdot 111 + d \cdot 11 + e,$$

где $0 \leqslant a, b, c, d, e \leqslant 9$. Посчитаем, сколько есть различных подходящих представлений.

При $a=0$ должно быть $b=9$, иначе сумма не превышает $8888+999+99+9 = 9995 < 10\,000$. В таком случае выходит не более 1000 представлений. При $a=9$ должно быть $b=c=d=e=0$, иначе сумма будет шестизначна. В таком случае получается только одно представление. При всех остальных восьми вариантах для a имеется не более 10 000 различных представлений. Суммарно же их не более 81 001, что меньше количества пятизначных чисел (которых 90 000)

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

Только ответ «нет» — 0 баллов.

Приведен пример числа, которое нельзя представить — 2 балла.

За наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход рассуждения, снимался 1 балл.

4. *У костра по кругу сидят семеро туземцев из нескольких племен. Каждый говорит своему соседу слева: «Среди остальных пятерых нет моих соплеменников». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Представители скольких племен собрались у костра?*

Решение. Если есть хотя бы 4 туземца из одного племени, то двое из них сидят рядом, тогда один из них солжет другому, хотя должен сказать правду. Если из какого-то племени лишь один туземец, то он говорит правду левому соседу, хотя должен врать. Значит, каждое племя имеет двух или трех представителей.

Тогда при двух племенах туземцев не более $3+3 < 7$, при четырех — не менее $2+2+2+2 > 7$, то есть племен ровно три.

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

Верный ответ (с примером или без) — 1 балл.

Доказательство, что не бывает меньше 3 племен — 2 балла.

Доказательство, что не бывает больше 3 племен — 2 балла.

В обоих случаях приведение конкретного примера рассадки (даже с утверждением, что туземцы могли сесть только так), доказательством не является.

5. *22 футболиста сыграли три тренировочных игры (разбиваясь каждый раз на два состава по 11 человек). Докажите, что какие то два футболиста все три раза играли в разных командах.*

Решение (1)**.** После первого матча выкрасим ребят, игравших в одной команде, в красный, а игравших в другой команде — в синий. Тогда во втором матче среди каждого из составов найдутся по крайней мере 6 одноцветных ребят, причем эти шестерки разных цветов. А в этих двух шестерках найдутся два разноцветных футболиста, не сыгравших в одной команде и в третий раз (иначе им всем нужно попасть в одну команду, для чего их слишком много).

Решение (2)**.** Изобразим игроков в виде точек и будем соединять отрезками тех, кто был сокомандником. После первой игры от каждого игрока будет выходить по 10 отрезков, а так как каждый соединяет двоих, то всего отрезков будет $\frac{22\cdot 10}{2} = 110$. Теперь посмотрим на произвольную команду во второй или третьей игре. Пусть x ребят из нее были в первом матче на одной стороне, а оставшиеся $11-x$ — на другой. Тогда новых отрезков добавится не более, чем $x(11-x) \leqslant 30$ (это можно, например, легко проверить перебором). То есть за оставшиеся две игры отрезков добавится, максимум, $4 \cdot 30 = 120$ и в итоге их будет не более $110 + 120 = 230$. Но если бы каждый сыграл с каждым, то их было бы $\frac{22\cdot 21}{2} = 231$.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Рассуждение про вратарей или капитанов команд — 0 баллов.

Разобран лишь случай, когда ко второй игре поменялись местами ровно по 5 игроков — не более 4 баллов. При этом попытка разбора данного случая в виде рассмотрения конкретного примера — не более 1 балла.

Разбор конкретного примера, как могли меняться игроки, — 0 баллов.

6. *Вася и Петя загадали два различных числа, и у каждого из них оказалось столько же простых делителей, сколько и составных. Могут ли числа Васи и Пети иметь общие делители, большие 1?*

Решение. Пусть число n содержит более двух простых делителей с учетом кратности. Тогда для каждого простого p, делящего n, число n/p — составное (и все эти числа различны). Также n делит само себя, а тогда составных делителей больше, чем простых. Значит, простых множителей не более двух. Легко видеть, что один быть тоже не может, а тогда их два, т. е. $n = pq$, где p, q простые. Но составной делитель тут только один: pq. Значит, $p = q$, то есть $n = p^2$. Очевидно, любые два различных числа такого вида общих делителей (кроме 1) не имеют, то есть ответ — нет.

Критерии. Полное решение — 8 баллов.

Только идея, что нужные числа — квадраты простых — 1 балл.

Обоснование этой идеи путем разбора конкретных случаев того, сколько может быть простых делителей, — не более 5 баллов.

7. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут хулиганы, дружащие между собой. Начиная с 1 января 2017 года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из соседних домов, а 1 января 2018 года впервые оказалось, что ссориться больше некому. Сколько могло быть всего хулиганов? Приведите все варианты и объясните, почему нет других.*

Решение. Разделим хулиганов на две группировки: в каждую будут объединены хулиганы из противоположных домов. Пусть в одной X хулиганов, а в другой Y. Чтобы все, кто нужно, рассорились, требуется $X \cdot Y$ ссор, и это равно 365. Это число имеет лишь два простых множителя: 5 и 73. Тогда разложений в произведение двух чисел у 365 ровно два:

$$365 = 73 \cdot 5, \quad 365 = 365 \cdot 1,$$

получаем ответ: хулиганов было либо $73 + 5 = 78$, либо $365 + 1 = 366$.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Только верный ответ — 1 балл.

За утверждение, что 365 раскладывается в произведение двух чисел только одним способом снимался 1 балл.